Módulo Geometria Espacial 3 - Volumes e Áreas de Cilindro, Cone e Esfera

Esfera.

3^a série E.M.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Geometria Espacial 3 - Volumes e Áreas de Cilindro, Cone e Esfera.
Esfera.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine a área e o volume de uma esfera cujo raio mede $9cm$.

Exercício 2. Uma laranja tem o formato de uma esfera de $4cm$ de raio. Se a quantidade de suco corresponde à 80% do volume da laranja, quantas laranjas como esta são necessárias para encher completamente de suco um copo de $300m\ell$?

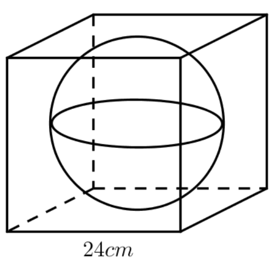
Exercício 3. Uma formiga caminha sobre a linha do equador de um globo terrestre esférico de $20cm$ de raio. Qual a distância percorrida pela formiga em cada volta sobre esta linha?

Exercício 4. Qual a quantidade de couro aproximada usada para forrar uma bola de futebol cujo raio é de aproximadamente $11cm$?

Exercício 5. Uma melancia em formato esférico, com $21cm$ de raio, é cortada em 12 fatias (12 cunhas esféricas). Qual o volume de cada uma destas fatias?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Qual o volume de uma esfera inscrita em um cubo de $24cm$ de aresta?

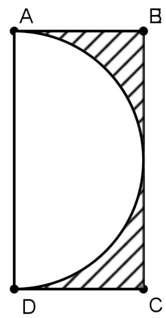


Exercício 7. Numa esfera de $10cm$ de diâmetro, faz-se um corte por um plano que dista $4cm$ do centro. Determine a área da seção feita.

Exercício 8. Calcule o volume de um cilindro equilátero inscrito em uma esfera de $4cm$ de raio.

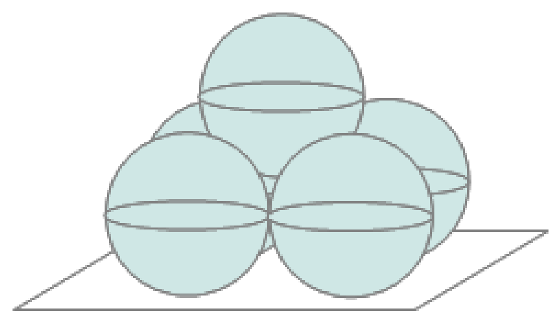
Exercício 9. Um recipiente em formato cilíndrico tem $3cm$ de raio da base e $10cm$ de altura. O nível da água tem $5cm$ de altura, mas quando uma esfera metálica é colocada no recipiente, esse nível da água passa a ter $8cm$. Determine o raio da esfera.

Exercício 10. De um retângulo $ABCD$, de base $CD = a$ e altura $BC = 2a$, recorta-se uma semicircunferência de diâmetro AD. Determine o volume do sólido gerado ao girarmos a figura que restou após o recorte usando AD como eixo.



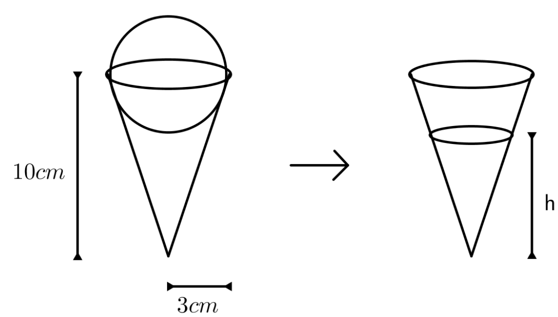
Exercício 11. Qual a medida da aresta de um cubo que possui o mesmo volume de uma esfera de $10cm$ de raio?

Exercício 12. Quatro esferas de $3cm$ de raio são colocadas, tangentes duas a duas, sobre uma mesa, de maneira que seus centros formem um quadrado. Uma quinta esfera, idêntica às primeiras, é colocada sobre as quatro primeiras. Qual a distância do centro da quinta esfera à superfície da mesa?



3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 13. Uma bola de sorvete de $3cm$ de raio é colocada em uma casquinha cônica de $3cm$ de raio da base e $10cm$ de altura. Com o passar do tempo esta bola derrete completamente e escorre para dentro do cone. Determine a altura do nível de sorvete.



Exercício 14. Um cálice com a forma de um cone contém Vcm^3 de uma bebida. Uma cereja de forma esférica com diâmetro de $2cm$ é colocada no cálice de forma a ficar

tangente às paredes do cálice e à superfície do líquido. Determine V.

Exercício 15. Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base tem medida R, contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é mergulhada nesse recipiente ficando totalmente submersa, sem haver transbordamento de água. Se a altura da água subiu $\frac{9}{16}R$, então o raio da esfera mede:

a) $\frac{2}{3}R$.

b) $\frac{3}{4}R$.

c) $\frac{4}{9}R$.

d) $\frac{1}{3}R$.

e) $\frac{9}{16}R$.

Exercício 16. Um cone de revolução tem altura $4cm$ e está circunscrito a uma esfera de raio $1cm$. O volume desse cone (em cm^3) é igual a:

a) $\frac{1}{3}\pi$.

b) $\frac{2}{3}\pi$.

c) $\frac{4}{3}\pi$.

d) $\frac{8}{3}\pi$.

e) 3π.

Exercício 17. Seis esferas de mesmo raio R são colocadas sobre uma superfície horizontal de tal forma que seus centros definam os vértices de um hexágono regular de aresta $2R$. Sobre estas esferas é colocada uma sétima esfera de raio $2R$ que tangencia todas as demais. Determine a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal.

Respostas e Soluções.

1. $A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 9^2 = 324\pi cm^2$.
$V = \dfrac{4\pi r^3}{3} = \dfrac{4\pi \cdot 9^3}{3} = 972\pi cm^3$.

2. Usando uma aproximação para π de $3,14$, temos que o volume de uma laranja é $V = \dfrac{4\pi r^2}{3} = \dfrac{4 \cdot 3,14 \cdot 4^2}{3} = 67cm^3 = 67m\ell$. Mas como apenas 80% deste volume é de suco, temos que o suco de cada laranja corresponde a $0,8 \cdot 67 = 53,6m\ell$. Para um copo de $300m\ell$, precisaremos de $\dfrac{300}{53,6} \cong 5,6$ laranjas, ou seja, devemos usar 6 laranjas.

3. A linha do equador de uma esfera corresponde ao comprimento da maior circunferência possível, ou seja, uma circunferência de raio $20cm$. Temos então que cada volta corresponde a $2\pi r \cong 2 \cdot 3,14 \cdot 20 = 125,60cm$.

4. $A = 4\pi r^2 \cong 4 \cdot 3,14 \cdot 11^2 = 1.519,76cm^2$.

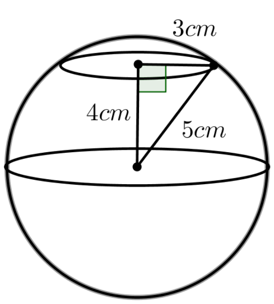
5. O volume de cada fatia (cunha) é $\dfrac{1}{12}$ do volume da melancia. Temos então $V = \dfrac{\frac{4\pi r^3}{3}}{12} = \dfrac{4\pi 21^3}{36} = 1029\pi cm^3$.

6. Se a esfera é inscrita ao cubo, seu raio mede a metade da medida da aresta do cubo, ou seja, $12cm$. Temos então que seu volume é $V = \dfrac{4\pi r^3}{3} = \dfrac{4\pi \cdot 12^3}{3} = 2.304\pi cm^3$.

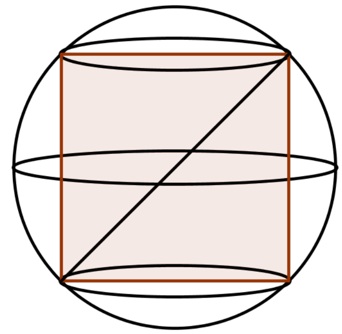
7. A seção determinada pelo corte é uma circunferência. O raio desta circunferência r, o raio da esfera R e o segmento que une os centros da esfera e da circunferência d formam um triângulo retângulo. Temos então:

$$\begin{aligned} R^2 &= r^2 + d^2 \\ 5^2 &= r^2 + 4^2 \\ r^2 &= 9 \\ r &= 3. \end{aligned}$$

Se $r = 3cm$, a área da seção feita é $A = \pi 3^2 = 9\pi cm^2$.



8. (Extraído da Vídeo Aula) Como o cilindro, de altura h e raio da base r, é equilátero, então $h = 2r$, ou seja, sua seção meridiana é um quadrado, sendo a diagonal deste quadrado, o diâmetro da esfera, que mede $8cm$. Temos então $8 = h\sqrt{2}$, segue que $h = 4\sqrt{2}cm$ e $r = 2\sqrt{2}cm$. Dessa forma, o volume do cilindro é $V = \pi r^2 h = \pi(2\sqrt{2})^2 4\sqrt{2} = 32\pi\sqrt{2}cm^3$.



9. (Extraído da Vídeo Aula) O volume da esfera V_e deve ser igual ao volume do deslocamento de água V_a. Temos então:

$$\begin{aligned} V_e &= V_a \\ \frac{4\pi R^3}{3} &= \pi r^2 h \\ \frac{4R^3}{3} &= 3^2(8-5) \\ 4R^3 &= 81 \\ R &= 3\sqrt[3]{\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

Só podemos concluir que $R = 3\sqrt[3]{\frac{3}{4}}cm$, depois de verificarmos que $R < r$ e $2R < 8cm$, o que é verdadeiro pois $R \cong 2,72cm$.

10. (Extraído da Vídeo Aula) O sólido gerado é um cilindro de altura $2a$ e raio da base a, subtraído de seu centro uma esfera de raio a. Temos então:

$$\begin{aligned} V &= V_{cil} - V_{esf} \\ &= \pi r^2 h - \frac{4\pi r^3}{3} \\ &= \pi a^2 2a - \frac{4\pi a^3}{3} \\ &= \frac{6\pi a^3 - 4\pi a^3}{3} \\ &= \frac{2\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

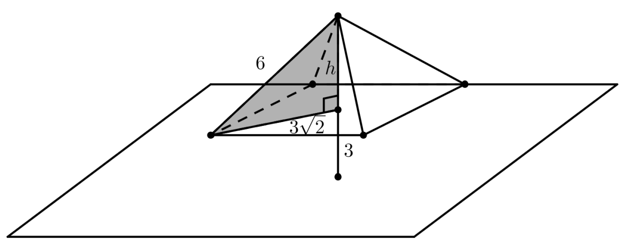
11. Seja a a medida da aresta do cubo, temos:

$$\begin{aligned} V_{cubo} &= V_{esfera} \\ a^3 &= \frac{4\pi r^3}{3} \\ a^3 &= \frac{4\pi 10^3}{3} \\ a &= 10\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}cm. \end{aligned}$$

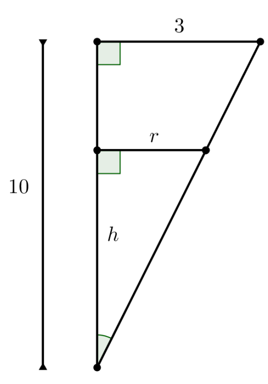
12. Unindo os centros das esferas, temos uma pirâmide quadrangular regular de aresta da base medindo $6cm$ e aresta lateral também medindo $6cm$. A distância entre o centro da quinta esfera e a superfície da mesa é a altura h da pirâmide mais $3cm$. Como a base da pirâmide é um quadrado, o raio da circunferência circunscrita a esse quadrado, a altura da pirâmide e a aresta lateral da pirâmide formam um triângulo retângulo. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned} h^2 + (3\sqrt{2})^2 &= 6^2 \\ h^2 &= 36 - 18 \\ h^2 &= 18 \\ h &= 3\sqrt{2}cm. \end{aligned}$$

Portanto a distância do centro da quinta esfera à superfície da mesa é $(3\sqrt{2}+3)cm$.



13. O volume da bola de sorvete é $V = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{3} = 36\pi cm^3$. Depois que o sorvete derrete, ele forma uma superfície circular na casquinha de raio r. Podemos estabelecer uma relação entre este raio r e a altura h do nível de sorvete, observando o desenho que segue.

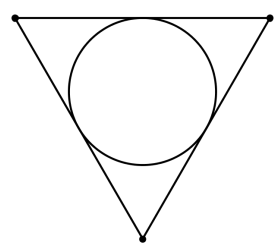


Como os triângulos são semelhantes, temos $\dfrac{r}{h} = \dfrac{3}{10}$, segue que $r = \dfrac{3h}{10}$. Calculando agora o volume de líquido derretido, que já conhecemos, ficamos com:

$$\begin{aligned} V &= 36\pi \\ \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} &= 36\pi \\ (\frac{3h}{10})^2 \cdot h &= 108 \\ \frac{9h^3}{100} &= 108 \\ h^3 &= 1.200 \\ h &= \sqrt[3]{1.200}. \end{aligned}$$

Como a altura do nível de sorvete que encontramos é $h = \sqrt[3]{1.200} \cong 10,6cm$, significa que o sorvete transborda, ou seja, não cabe na casquinha.

14. (Extraído da Vídeo Aula) Como a cereja com formato esférico fica tangente à taça e à superfície líquida, vamos observar o desenho com a secção meridiana do cone.



Se o raio da esfera é $1cm$, a altura do cone é $3cm$, pois na secção meridiana temos um triângulo equilátero circunscrito a uma circunferência e, consequentemente, o lado deste triângulo é $\ell = 2\sqrt{3}cm$, ou seja, o raio da base do cone é $R = \sqrt{3}cm$. Vamos agora para o cálculo do volume de líquido V, que é a diferença entre os volumes do cone e da esfera:

$$\begin{aligned} V &= V_{cone} - V_{esfera} \\ &= \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} - \frac{4\pi \cdot r^3}{3} \\ &= \frac{\pi \cdot \sqrt{3}^2 \cdot 3}{3} - \frac{4\pi \cdot 1^3}{3} \\ &= \frac{9\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} \\ &= \frac{5\pi}{3}cm^3. \end{aligned}$$

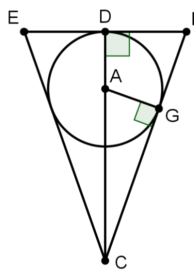
15. (Extraído da EsPCEx - 2015) O volume da esfera é igual ao deslocamento de água no cilindro. Considerando

r a medida do raio da esfera, temos:

$$\begin{aligned} V_{esfera} &= V_{agua} \\ \frac{4\pi r^3}{3} &= \pi R^2 \frac{9R}{16} \\ r^3 &= \frac{27R^3}{64} \\ r &= \frac{3R}{4}. \end{aligned}$$

Resposta B.

16. (Extraído da EsPCEx - 2014) Vamos observar a secção meridiana da situação.



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AGC, temos $GC^2 = (DC - AC)^2 - 1^2$, segue que $GC = 2\sqrt{2}cm$. Além disso, podemos perceber que $\triangle AGC \equiv \triangle FDC$. Temos então:

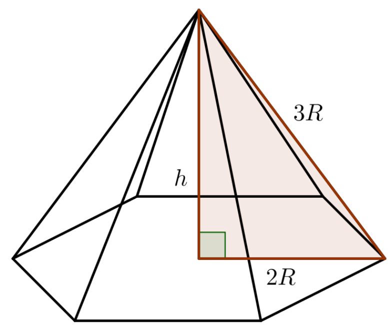
$$\begin{aligned} \frac{DC}{GC} &= \frac{DF}{AG} \\ \frac{4}{2\sqrt{2}} &= \frac{r}{1} \\ r &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Como já conhecemos o raio r da base do cone e sua altura, seu volume é $V = \dfrac{\pi \cdot 2 \cdot 4}{3} = \dfrac{8\pi}{3}cm^3$. Resposta D.

17. (Extraído do ITA - 2014) Unindo-se os vértices das esferas, teremos uma pirâmide hexagonal regular de aresta lateral $3R$ e aresta da base $2R$. A altura h da pirâmide, a aresta lateral e o raio da circunferência circunscrita ao hexágono da base, que tem mesma medida da aresta da base, formam um triângulo retângulo. Temos então:

$$\begin{aligned} h^2 + (2R^2) &= (3R^2) \\ h^2 &= 9R^2 - 4R^2 \\ h^2 &= 5R^2 \\ h &= R\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Como a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal é a altura da pirâmide mais a distância do centro de uma das outras esferas à mesma superfície, temos que esta distância é $R\sqrt{5} + R = R(1 + \sqrt{5})$.



Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com