Módulo de Geometria Espacial I - Fundamentos

Poliedros.

3° ano/E.M.

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Geometria Espacial I - Fundamentos
Poliedros.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Um poliedro convexo tem 6 faces e 12 arestas. Determine o número de vértices deste poliedro.

Exercício 2. Se um poliedro convexo possui 5 faces quadrangulares e 4 faces triangulares, determine sua quantidade de vértices.

Exercício 3. Num poliedro convexo com 10 arestas, o número de faces é igual ao número de vértices. Quantas faces tem esse poliedro?

Exercício 4. Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces desse poliedro.

Exercício 5. Quantos vértices tem um poliedro cuja soma dos ângulos das faces é 116π?

Exercício 6. Seja um cubo de 4cm de aresta. Determine:

(a) a área total deste cubo.

(b) o volume deste cubo.

(c) a medida da diagonal deste cubo.

Exercício 7. Determine a medida da aresta de um cubo cuja área total é 54cm^2.

Exercício 8. Se um paralelepípedo reto-retângulo tem dimensões 3cm x 4cm x 5cm, determine:

(a) a área total deste paralelepípedo.

(b) o volume deste paralelepípedo.

(c) a medida da diagonal deste paralelepípedo.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Um poliedro convexo possui apenas faces quadrangulares e triangulares. Calcule o número de tais faces sabendo que ele possui 20 arestas e 10 vértices.

Exercício 10. Determine a soma dos ângulos das faces dos seguintes poliedros de Platão.

a) tetraedro;

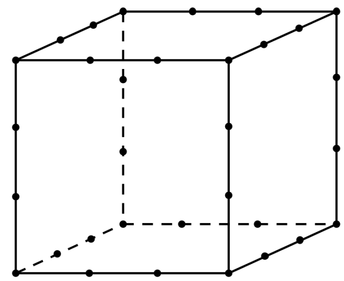
b) hexaedro;

c) octaedro;

d) dodecaedro;

e) icosaedro.

Exercício 11. Nas arestas de um cubo, marcam-se dois pontos em cada uma, de maneira que cada aresta seja dividida em três partes iguais. Trunca-se o cubo de forma que planos passem nos três pontos mais próximos de cada vértice, dos marcados anteriormente.



Após a retirada das 8 pirâmides geradas pelos planos, determine:

a) quantos vértices, faces e arestas possui esse novo poliedro.

b) quantas diagonais possui esse novo poliedro.

Exercício 12. Determine a medida da aresta de um cubo, sabendo que a soma dos comprimentos de todas as arestas com todas as diagonais e com as diagonais das seis faces é 32cm.

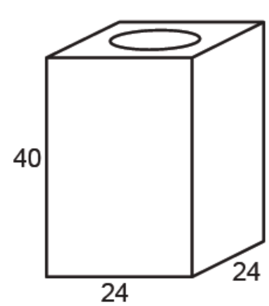
Exercício 13. Determine a altura de um tetraedro regular de aresta medindo 12cm.

Exercício 14. Seja um prisma reto com 10cm de altura e um paralelogramo, como base, com lados medindo 4cm e $5\sqrt{2}$cm e um dos ângulos internos medindo 45^o. Determine seu volume.

Exercício 15. Se a área da base de um prisma aumenta em 20% e sua altura diminui 10%, qual a razão entre seu volume final e inicial?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostrados na figura.



Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual. Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em

a) 14,4%

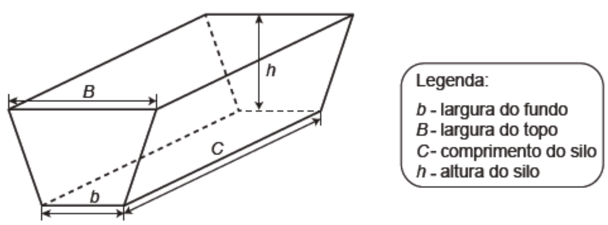
b) 20,0%

c) 32,0%

d) 36,0%

e) 64,0%

Exercício 17. Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Considere um silo de 2m de altura, 6m de largura de topo e 20m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem $0,5$m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2m^3 desse tipo de silo.
(Extraído de EMBRAPA. Gado de corte. Disponível em: www.cnpgc.embrapa.br. Acesso em: 1 ago. 2012 (adaptado)).
Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é

a) 110.

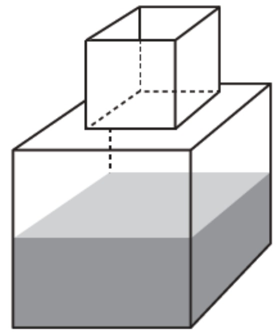
b) 125.

c) 130.

d) 220.

e) 260.

Exercício 18. Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.



Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

a) 8.

b) 10.

c) 16.

d) 18.

e) 24.

Exercício 19. Considere um prisma regular reto de base hexagonal tal que a razão entre a aresta da base e a aresta lateral é $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Aumentando-se a aresta da base em 2cm e mantendo-se a aresta lateral, o volume do prisma ficará aumentado de 108cm^3. O volume do prisma original é

a) 18cm^3.

b) 36cm^3.

c) $18\sqrt{3}\text{cm}^3$.

d) $36\sqrt{3}\text{cm}^3$.

e) 40cm^3.

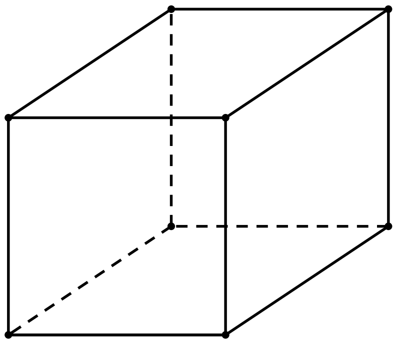
Exercício 20. Francisco acaba de aprender em sua aula de geometria espacial a *Relação de Euler* para poliedros convexos:

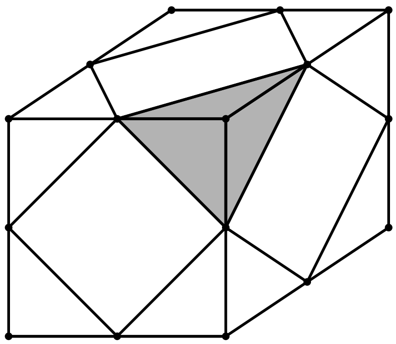
$$V + F = A + 2.$$

Na equação acima, V, A e F representam o número de vértices, de arestas e de faces do poliedro, respectivamente. Podemos verificar que a Relação de Euler é válida no cubo abaixo, pois existem 6 faces, 12 arestas, 8 vértices e

$$V + F = 8 + 6 = 12 + 2 = A + 2.$$

João decidiu verificar a Relação de Euler em outro poliedro obtido de um cubo de madeira. Ele marcou os pontos médios de cada aresta e, em cada face, os uniu formando quadrados, como mostra a figura abaixo. Em seguida, ele cortou as 8 pirâmides formadas em torno de cada vértice obtendo um novo poliedro. Determine:





a) o novo número de vértices;

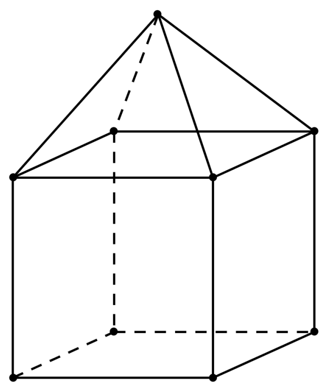
b) o novo número de arestas;

c) o novo número de faces.

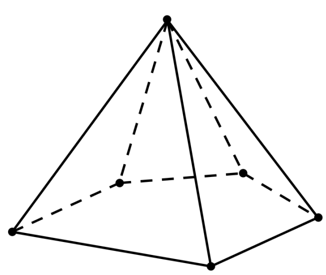
Respostas e Soluções.

1. Utilizando a relação de Euler, temos $V + 6 = 12 + 2$, segue que $V = 8$, ou seja, este poliedro tem 8 vértices. Perceba que o poliedro em questão pode ser um cubo.

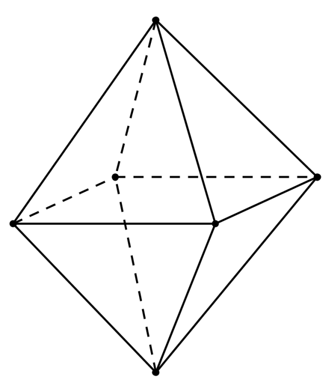
2. Como são 5 faces quadrangulares e 4 faces triangulares, o total de arestas é $\dfrac{5 \cdot 4 + 4 \cdot 3}{2} = 16$. Usando a relação de Euler, temos $V + 9 = 16 + 2$, segue que $V = 9$, ou seja, são 9 vértices. A figura a seguir mostra um poliedro com tais características.



3. Usando a relação de Euler e sabendo que $V = F$, temos $F + F = 10 + 2$, segue que $F = 6$, ou seja, são 6 faces. A figura mostra um poliedro com tais características.



4. Temos $A = V + 6$. Usando a relação de Euler, ficamos com $V + F = (V + 6) + 2$, segue que $F = 8$, ou seja, são 8 faces. A figura a seguir mostra um poliedro com tais características.



5. (Extraído da Vídeo Aula)

$$\begin{aligned} S &= 2\pi(V-2) \\ 116\pi &= 2\pi(V-2) \\ 58 &= V-2 \\ V &= 60. \end{aligned}$$

Portanto, são 60 vértices.

6.

(a) $A = 6a^2 = 6 \cdot 4^2 = 96\text{cm}^2$.

(b) $V = a^3 = 4^3 = 64\text{cm}^3$.

(c) $D = 4\sqrt{3}\text{cm}$.

7.

$$\begin{aligned} A &= 54 \\ 6a^2 &= 54 \\ a^2 &= 9 \\ a &= \pm 3. \end{aligned}$$

Portanto, a medida da aresta do cubo é 3cm.

8.

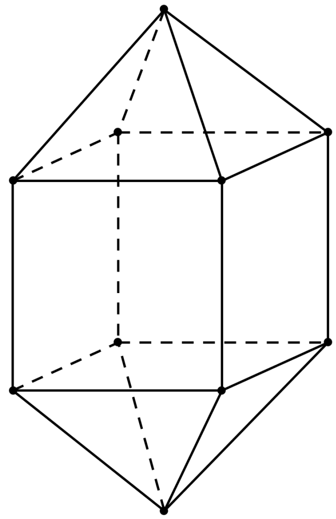
(a)

$$\begin{aligned} A &= 2(3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5) \\ &= 2(12 + 15 + 20) \\ &= 2 \cdot 47 \\ &= 94cm^2. \end{aligned}$$

(b) $V = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60\text{cm}^3$.

(c) $D = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\text{cm}$.

9. Chamando de t o número de faces triangulares e q o número de faces quadrangulares, temos que $F = t + q$. Usando a relação de Euler, ficamos com $10 + t + q = 20 + 2$, segue que $t + q = 12$. Temos também que $\dfrac{3t + 4q}{2} = 20$, ou seja, $3t + 4q = 40$. Resolvendo o sistema com as duas equações obtidas, chegamos a $t = 8$ e $q = 4$, ou seja, são 8 faces triangulares e 4 faces quadrangulares. A figura mostra um poliedro com tais características.



10.

a) $S = 360°(V - 2) = 360°(4 - 2) = 720°$.

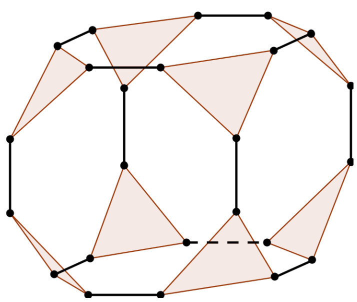
b) $S = 360°(V - 2) = 360°(8 - 2) = 2160°$.

c) $S = 360°(V - 2) = 360°(6 - 2) = 1440°$.

d) $S = 360°(V - 2) = 360°(20 - 2) = 6480°$.

e) $S = 360°(V - 2) = 360°(12 - 2) = 3600°$.

11. (Extraído da Vídeo Aula)



a) Sabemos que o cubo tem 8 vértices, 12 arestas e 6 faces. Perceba que em cada vértice truncado, o próprio deixa de existir, mas outros 3 aparecem, ou seja, são $8 \cdot 3 = 24$ vértices. Em cada vértice truncado surgem 3 novas arestas, segue que são $12 + 8 \cdot 3 = 36$ arestas. Como surgem 8 novas faces (planos), o total passa a ser $6 + 8 = 14$ faces.

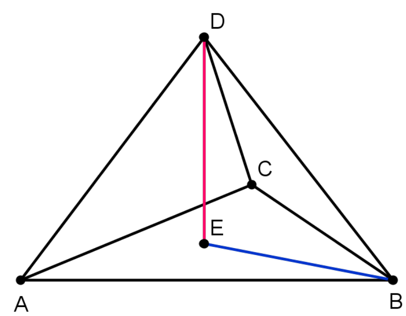
b) O total de segmentos que podemos traçar utilizando dois pontos quaisquer dentre os 24 vértices do poliedro é $C_{24,2} = \dfrac{24!}{22! \cdot 2!} = 276$. Mas as 36 arestas, incluídas nesta contangem, não são diagonais, assim com as diagonais das faces octogonais, que são $6 \cdot \dfrac{8 \cdot 5}{2} = 120$. Assim, o total de diagonais é $276 - 36 - 120 = 120$.

12. Chamando o comprimento de cada aresta de a, o comprimento de todas elas é $12a$. Cada diagonal de uma face mede $a\sqrt{2}$ e, como são duas por face, o comprimento total das diagonais é $12a\sqrt{2}$. Cada diagonal do cubo mede $a\sqrt{3}$ e, como são quatro diagonais, o comprimento total das diagonais do cubo é $4a\sqrt{3}$. Temos então

$$\begin{aligned} 12a + 12a\sqrt{2} + 4a\sqrt{3} &= 32 \\ a &= \frac{32}{12 + 12\sqrt{2} + 4\sqrt{3}} \\ a &= \frac{8}{3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Portanto, a medida é $\dfrac{8}{a(3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3})}$cm.

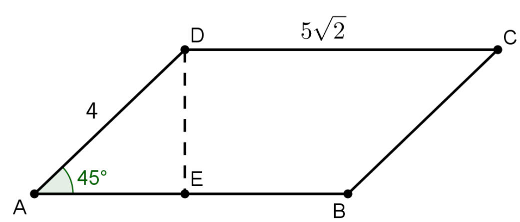
13. Considerando o tetraedro $ABCD$, vamos projetar o vértice D sobre a base ABC, nomeando esse ponto de E. Como o tetraedro é regular, o ponto E é o circuncentro do triângulo ABC. O segmento EB é o raio desse circuncírculo e vale $\dfrac{2 \cdot 12\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = 4\sqrt{3}$. Temos, assim, o triângulo, retângulo em E, DEB. Chamando a altura do tetraedro de h e aplicando o teorema de Pitágoras neste triângulo, temos



$$\begin{aligned} h^2 + (4\sqrt{3})^2 &= 12^2 \\ h^2 + 48 &= 144 \\ h^2 &= 96 \\ h &= 4\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Temos então que a altura de um tetraedro regular de 12cm é $4\sqrt{6}$cm.

14. Inicialmente, vamos calcular a área da base. Pela figura, temos que a altura DE da base é $4 \cdot \sin 45^o = 2\sqrt{2}$cm.



Assim, o volume V do prisma é $10 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 200\text{cm}^3$.

15. $V_f = 1,2A_b \cdot 0,9h = 1,08A_bh = 1,08V_i$, ou seja, $\dfrac{V_f}{V_i} = 1,08$.

16. (Extraído do ENEM - 2014)

$$\begin{aligned} h \cdot 1,25 \cdot 24 \cdot 1,25 \cdot 24 &= 40 \cdot 24 \cdot 24 \\ h \cdot 1,25 \cdot 1,25 &= 40 \\ h &= \frac{40}{1,25 \cdot 1,25} \\ h &= 25,6. \end{aligned}$$

Como a altura da nova lata deve ser $25,6$cm, sua redução percentual deve ser de $\dfrac{40 - 25,6}{40} = 0,36$, ou seja, 36%. Resposta D.

17. (Extraído do ENEM - 2014) A largura da base é $6 - 2 \cdot 0,5 = 5$m. Então o volume do silo é $\dfrac{6+5}{2} \cdot 2 \cdot 20 = 220\text{m}^3$. Como 1 tonelada ocupa 2 metros cúbicos, a capacidade do silo é $\dfrac{220}{2} = 110$ metros cúbicos. Resposta A.

18. Seja $v = a^3$ o volume da menor parte, o volume da maior parte será $V = (2a)^3 = 8a^3$. Assim, como o volume da parte menor é 8 vezes menor que o volume da parte maior, seu tempo será 8 vezes menor. Como o maior enche em $8 + 8 = 16$min, a menor enche em 2min. Para o restante do depósito, são $8 + 2 = 10$min. Resposta B.

19. (Extraído da EsPCEx - 2013) Temos que $a_b = a_l\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e o volume inicial é $V_o = \dfrac{3(a_b)^2\sqrt{3}a_l}{2} = \dfrac{(a_l)^3\sqrt{3}}{2}$. Aumentando a aresta da base, temos:

$$\begin{aligned} V_o + 108 &= \frac{3(a_b+2)^2\sqrt{3}}{2} \cdot a_l \\ V_o + 108 &= \frac{3(a_l\frac{\sqrt{3}}{3}+2)^2\sqrt{3}}{2} \cdot a_l \\ V_o + 108 &= \frac{(a_l)^3\sqrt{3}}{2} + 6(a_l)^2 + 6\sqrt{3}a_l \\ 108 &= 6(a_l)^2 + 6\sqrt{3}a_l \\ (a_l)^2 + \sqrt{3}a_l - 18 &= 0 \\ a_l &= 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Como $a_l = 2\sqrt{3}$ é a medida da aresta lateral, pois é a única solução positiva da equação do segundo grau encontrada, o volume original é $V_o = \dfrac{(a_l)^3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{(2\sqrt{3})^3\sqrt{3}}{2} = 18\text{cm}^3$. Resposta A.

20. (Extraído do Banco de Problemas 2015)

a) Os vértices do novo poliedro são exatamente os pontos médios das arestas do cubo original. Como o cubo tem 12 arestas, o novo poliedro possui 12 vértices.

b) Cada aresta do novo poliedro é um lado de um dos quadrados formados nas faces. Como o cubo possui 6 faces e cada uma delas possui os 4 lados de um dos quadrados, o total de arestas procurado é $4 \cdot 6 = 24$.

c) Existem 8 faces triangulares que são as bases das pirâmides removidas e 6 faces quadradas formadas nas faces do cubo original. Temos então $8 + 6 = 14$ faces.

Veja que a Relação de Euler é válida também para esse novo poliedro, pois

$$V + F = 12 + 14 = 24 + 2 = A + 2.$$

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com