

Módulo de Leis dos Senos e dos Cossenos

Leis dos Senos e dos Cossenos.

1ª série E.M.



Trigonometria
Leis dos Senos e dos Cossenos.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Calcule o que se pede em cada um dos itens abaixo.

- Qual o cosseno do maior ângulo do triângulo de lados medindo 5, 6 e 7?
- Qual o cosseno do menor ângulo do triângulo de lados medindo 7, 8 e 10?
- Num triângulo com lados medindo 5 e 6 e um ângulo de 60° , qual o lado que oposto ao ângulo informado?
- Qual o cosseno de maior ângulo do triângulo de lados medindo 2, 3 e 5?

Exercício 2. Dois lados de um triângulo medem 6 m e 10 m e formam entre si um ângulo de 120° . Determinar a medida do terceiro lado.

Exercício 3. Os lados de um triângulo obtusângulo medem 3, 4 e x . Podemos afirmar que

- $5 < x < 7$.
- $1 < x < \sqrt{7}$ ou $5 < x < 7$.
- $\sqrt{7} < x < 5$.
- $x = 5$ ou $x = 7$.

Exercício 4. Sendo a o lado oposto ao ângulo α , b oposto a β e c oposto a γ , em um triângulo. Calcule:

- o seno de β para $a = 4$ cm, $\alpha = 30^\circ$ e $b = 8$ cm;
- o valor de γ para $a = \sqrt{2}$ cm, $\beta = 45^\circ$ e $b = 2$; e
- o cosseno de α para $a = \sqrt{3}$, $\text{sen } \gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $c = 10$.

Exercício 5. Dado um triângulo ABC com $BC = 5\sqrt{2}$ cm, $\hat{B}AC = 45^\circ$ e $\hat{A}BC = 30^\circ$. Qual a medida de AC ?

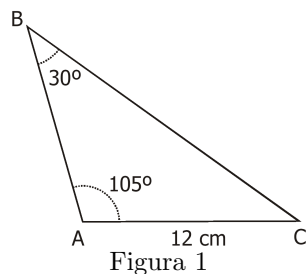
Exercício 6. Calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo do qual se conhecem um lado $AB = 10$ m e o ângulo oposto $C = 60^\circ$.

Exercício 7. Um navio, deslocando-se em linha reta, visa um farol e obtém a leitura de 30° para o ângulo formado entre a sua trajetória e a linha de visada do farol. Após navegar 20 milhas, através de uma nova visada ao farol, obtém a leitura de 75° . Determine a distância entre o farol e o navio no instante em que fez a 2ª leitura. (Use $\sqrt{2} \cong 1,4$).

Exercício 8. Dado um triângulo de lados 5 cm, 7 cm e 8 cm, determine o valor do cosseno e o seno do menor ângulo interno desse triângulo.

Exercício 9. No triângulo ABC , os lados AC e BC medem 8 cm e 6 cm, respectivamente, e o ângulo A vale 30° . Quanto vale o seno do ângulo B ?

Exercício 10. Três ilhas A , B e C aparecem num mapa, em escala 1 : 10000, como na figura 1. Das alternativas, a que melhor aproxima a distância em km entre as ilhas A e B é:



- a) 2,3. b) 2,1. c) 1,9. d) 1,4. e) 1,7.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 11. Os lados de um triângulo são 3, 4 e 6. O cosseno do maior ângulo interno desse triângulo vale:

- a) $\frac{11}{24}$ b) $-\frac{11}{24}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $-\frac{3}{8}$ e) $-\frac{3}{10}$

Exercício 12. Calcule o que se pede em cada um dos itens abaixo.

- Qual o cosseno do maior ângulo do triângulo de lados medindo 4, 5 e 6?
- Qual o cosseno do menor ângulo do triângulo de lados medindo 7, 8 e 10?
- Qual o cosseno de maior ângulo do triângulo de lados medindo 5, 10 e 15?

Exercício 13. Em um triângulo, as medidas de seus lados, em metros, são três números inteiros consecutivos e a medida do maior ângulo é o dobro da medida do menor. A medida do menor lado deste triângulo é

Exercício 14. A , B e C são pontos de uma circunferência de raio 3 cm, $AB = BC$ e o ângulo $\hat{A}BC$ mede 30° . Calcule, em cm, o comprimento do segmento AC .

Exercício 15. Um $\triangle ABC$ tem lados AB , AC e BC que medem, respectivamente, 5 cm, 10 cm e 9 cm. Determine a medida da mediana relativa ao lado AC .

Exercício 16. Em um paralelogramo $ABCD$, os lados AB e AD medem, respectivamente, $x\sqrt{2}$ cm e x cm, e θ é o ângulo obtuso formado entre eles. Se a diagonal maior mede $2x$ cm, então qual o valor do seno do ângulo θ ?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 17. Considere o triângulo retângulo da figura 2.

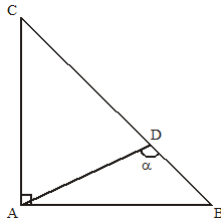


Figura 2

Sabendo-se que $\alpha = 120^\circ$, $AB = AC = 1$ cm, então AD é igual a

Exercício 18. Na figura 3, $AD = 2$ cm, $AB = \sqrt{3}$ cm, a medida do ângulo $B\hat{A}C$ é 30° e $BD = DC$, onde D é ponto do lado AC . A medida do lado BC , em cm, é

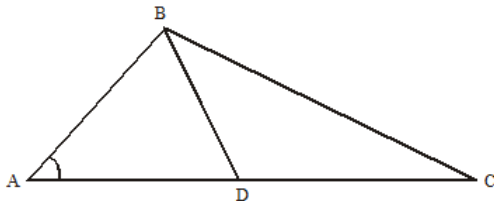


Figura 3

Exercício 19. Uma circunferência de raio 14 cm circunscreve um triângulo ABC . Calcule a medida do lado AB , sabendo-se que o triângulo ABC não é retângulo e que o ângulo $A\hat{C}B$ mede 30° .

Exercício 20. Na figura 4, tem-se o triângulo ABC inscrito em uma circunferência de centro D .

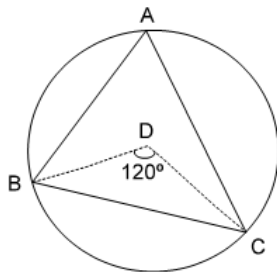


Figura 4

Se $AB = 6$ cm e $AC = 9$ cm, o perímetro do triângulo ABC , em centímetros, é aproximadamente igual a

- a) 18,4 b) 19,8 c) 20,6 d) 21,4 e) 22,9

Exercício 21. Num triângulo ABC , retângulo em \hat{A} , temos $\hat{B} = 60^\circ$. As bissetrizes destes ângulos se encontram num ponto D . Se o segmento de reta BD mede 1 cm, então a hipotenusa mede:

Exercício 22. Na figura 5, tem-se

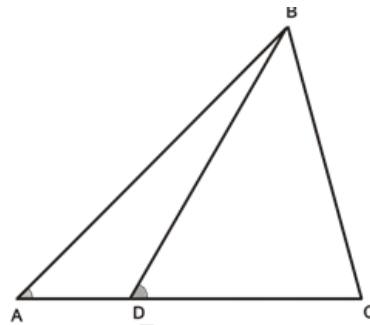


Figura 5

$B\hat{A}C = 45^\circ$, $B\hat{D}C = 60^\circ$, $AD = 5$ u.c. e $DC = 10$ u.c.. Com base nesses dados, calcule BC .

Exercício 23. Um observador, situado no ponto A , distante 30 m do ponto B , vê um edifício sob um ângulo de 30° , conforme a figura abaixo. Baseado nos dados da figura 6, determine a altura do edifício em metros e divida o resultado por $\sqrt{2}$.

Dados: $AB = 30$ m; $A\hat{C}D = 30^\circ$; $C\hat{A}B = 75^\circ$; $A\hat{B}C = 60^\circ$; $D\hat{C}A = 90^\circ$.

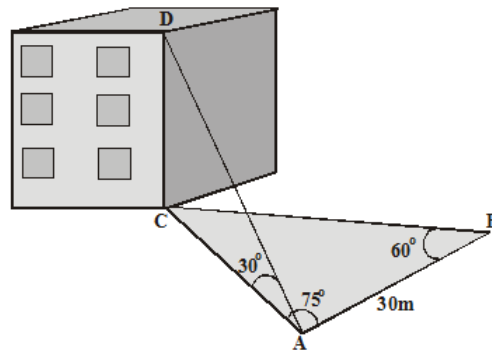


Figura 6

Exercício 24. A proporção

$$\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$$

implica que

$$\frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{e+g}{f+h}$$

Interprete o resultado acima e o aplique juntamente com a lei dos senos para resolver os itens abaixo.

a) No triângulo ABC , p é o semiperímetro e R o raio do círculo circunscrito. Prove que

$$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta + \text{sen } \gamma = \frac{p}{R}$$

b) Os senos dos ângulos de um triângulo são números racionais. Mostre que os seus cossenos são também racionais.

Exercício 25. As páginas de um livro medem 1 dm de base e $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ dm de altura. Se este livro for parcialmente aberto, de tal forma que o ângulo entre duas páginas seja 60° , a medida do ângulo α , formado pelas diagonais das páginas, será:

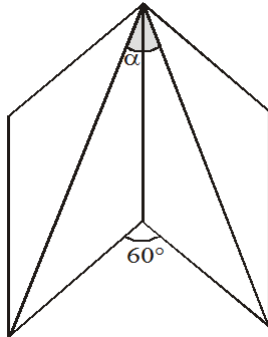


Figura 7

Exercício 26. Calcule a área do triângulo ABC tal que $AB = 1$ cm, $BC = 0,5$ cm e o ângulo $\hat{A}BC$ tem o dobro da medida do ângulo $\hat{B}AC$.

Respostas e Soluções.

1.

- a) O maior ângulo do triângulo é o oposto ao maior lado. Chame de α o ângulo oposto ao lado de medida 7. Aplicando a Lei dos Cossenos temos:

$$7^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos \alpha$$

e chegaremos a $\cos \alpha = \frac{1}{5}$.

- b) O menor ângulo do triângulo é o oposto ao menor lado. Chame de α o ângulo oposto ao lado de medida 7. Aplicando a Lei dos Cossenos temos:

$$7^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cos \alpha$$

e chegaremos a $\cos \alpha = \frac{23}{32}$.

- c) Aplicando a Lei dos Cossenos temos:

$$a^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos 60^\circ$$

e chegaremos a $a = \sqrt{31}$.

- d) Observe que esses lados não formam um triângulo, pois, pela desigualdade triangular, $a < b + c$ e na questão $5 = 3 + 2$.

2. Seja a o lado oposto a 120° , então podemos escrever que

$$a^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ$$

$$a^2 = 36 + 100 - 120 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$a = \sqrt{196}$$

$$a = 14 \text{ m.}$$

3. (Adaptado do vestibular da UNIMONTES MG)

Para o triângulo existir deveremos ter, pela desigualdade triangular, $4 - 3 < x < 4 + 3$, ou seja, $1 < x < 7$. Perceba que se $x = 5$ teremos o triângulo retângulo pitagórico ¹. Se x for o maior lado, o triângulo será obtusângulo se

$$x^2 > 3^2 + 4^2$$

$$x^2 > 25$$

$$x > 5.$$

Então, $5 < x < 7$. Mas, se x não for o maior lado, teremos

$$4^2 > 3^2 + x^2$$

$$x^2 < 7$$

$$x < \sqrt{7}$$

Portanto, obtemos $1 < x < \sqrt{7}$. Resposta na letra **C**.

¹Catetos medido 3 e 4 e hipotenusa medindo 5, esse é o triângulo retângulo com menores medidas inteiras para os lados.

4.

- a) Pela lei dos senos temos que:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\frac{4}{\sin 30^\circ} = \frac{8}{\sin \beta}$$

$$\sin \beta = 1.$$

- b) Pela lei dos senos temos que:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30^\circ.$$

Portanto, como $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, então $\gamma = 105^\circ$.

- c) Pela lei dos senos temos que:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin \alpha} = \frac{10}{\sin \gamma}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin \alpha} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{10}.$$

Pela fórmula fundamental, ficamos com

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{100}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{99}{100}} = \frac{3\sqrt{11}}{10}.$$

5. Pela lei dos senos temos que

$$\frac{5\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 30^\circ}$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AC}{\frac{1}{2}}$$

$$AC = 5 \text{ cm.}$$

6. Da lei dos senos temos que

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

sendo R o raio da circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$.

$$\text{Daí, } \frac{10}{\sin 60^\circ} = 2R \text{ e } R = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

7. Seja A o ponto em que o navio se encontra no primeiro momento, B o do segundo, C um ponto qualquer da trajetória do navio e F o do farol. Da interpretação do enunciado concluímos que $F\hat{A}B = 30^\circ$, $AB = 20$ milhas, $F\hat{B}C = 75^\circ$ e $BF = d$ milhas. Podemos concluir que $B\hat{F}A = 45^\circ$ e, pela lei de senos, ficaremos com:

$$\frac{d}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{20}{\text{sen } 45^\circ}$$

$$\frac{d}{1} = \frac{20}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$d = \frac{20}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$d = \frac{20}{1,4}$$

$$d \cong 14,3 \text{ milhas.}$$

8. Seja α o menor ângulo interno. Ele será o oposto ao lado de medida 5 e, aplicando a lei dos cossenos, teremos

$$5^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$$

$$-\cos \alpha = \frac{25 - 49 - 64}{2 \cdot 7 \cdot 8}$$

$$\cos \alpha = \frac{11}{14}.$$

E aplicando a fórmula fundamental obteremos

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{11}{14}\right)^2 = 1$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

9. Da lei dos senos temos que

$$\frac{8}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{6}{\text{sen } 30^\circ}$$

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{2}{3}$$

10. (Extraído do vestibular do MACK SP)

Observe que $B\hat{C}A = 45^\circ$ e, aplicando a lei dos senos, teremos

$$\frac{AB}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{12}{\text{sen } 30^\circ}$$

$$AB = 12\sqrt{2}.$$

Após o uso da escala, $AB = 120000\sqrt{2}$ cm ou $AB \cong 1,7$ km, que está na letra **E**.

11. O maior ângulo do triângulo é o oposto ao maior lado, chame-o de θ , e o seu lado correspondente será o de medida 6. Aplicando a Lei dos Cossenos temos

$$6^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \theta$$

e chegaremos a $\cos \theta = -\frac{11}{24}$, que está na letra **B**.

12.

a) O maior ângulo do triângulo é o oposto ao maior lado, chame-o de β , e o seu lado correspondente será o de medida 6. Aplicando a Lei dos Cossenos temos

$$6^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos \beta$$

e chegaremos a $\cos \beta = \frac{1}{8}$.

b) O menor ângulo do triângulo é o oposto ao menor lado, chame-o de γ , e o seu lado correspondente será o de medida 7. Aplicando a Lei dos Cossenos temos

$$7^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cos \gamma$$

e chegaremos a $\cos \gamma = \frac{23}{32}$.

c) Observe que esses lados não formam um triângulo, pois, pela desigualdade triangular, $a < b + c$ e na questão $15 = 10 + 5$.

13. (Extraído do vestibular da UECE)

Sejam os lados do triângulo iguais a $x - 1$, x e $x + 1$ e os respectivos ângulos iguais a α , β e 2α . Interpretando o enunciado e aplicando a lei dos senos temos que

$$\frac{x - 1}{\text{sen } \alpha} = \frac{x + 1}{\text{sen}(2\alpha)}$$

$$\cos \alpha = \frac{x + 1}{2x - 2}.$$

Agora, aplicando a lei dos cossenos, obteremos

$$(x - 1)^2 = x^2 + (x + 1)^2 - 2 \cdot x \cdot (x + 1) \cdot \cos \alpha$$

$$(x - 1)^2 = x^2 + (x + 1)^2 - 2 \cdot x \cdot (x + 1) \cdot \frac{x + 1}{2x - 2}$$

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 + x^2 + 2x + 1 - \frac{x \cdot (x + 1)^2}{x - 1}$$

$$x^2 + 4x = \frac{x \cdot (x + 1)^2}{x - 1}$$

$$(x + 4) = \frac{(x + 1)^2}{x - 1}$$

$$(x + 4)(x - 1) = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + 3x - 4 = x^2 + 2x + 1$$

$$x = 5,$$

E o menor lado mede $x - 1 = 4$ m.

14. (Adaptado do vestibular da FUVEST SP)

Da lei dos senos temos que

$$\frac{AC}{\text{sen } 30^\circ} = 2 \cdot 3, \text{ daí } AC = 3 \text{ cm.}$$

15. Observe que, pela lei dos cossenos, obtemos

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \hat{B}AC \\ 9^2 &= 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos \hat{B}AC \\ \cos \hat{B}AC &= \frac{11}{25}. \end{aligned}$$

Agora, Sendo BM a mediana relativa a AC , teremos $AM = 5$, $\hat{B}AC = \hat{B}AM$ e, pela lei dos cossenos, teremos

$$\begin{aligned} BM^2 &= AB^2 + AM^2 - 2 \cdot AB \cdot AM \cdot \cos \hat{B}AM \\ BM^2 &= 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{11}{25} \\ BM &= \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \text{ cm.} \end{aligned}$$

16. Denominado $AD = BC = x$ e $AB = CD = y$, teremos que a diagonal maior será AC , pois

$$\begin{aligned} AC^2 &= x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cos(180^\circ - \theta) \\ AC^2 &= x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y (-\cos(\theta)) \\ AC^2 &= x^2 + y^2 + 2 \cdot x \cdot y \cos(\theta) \end{aligned}$$

e

$$BD^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cos(\theta),$$

ou seja, $AC > BD$. Seguindo com os valores do enunciado obteremos

$$\begin{aligned} (2x)^2 &= x^2 + (x\sqrt{2})^2 + 2 \cdot x \cdot x\sqrt{2} \cos(\theta) \\ 4x^2 &= x^2 + 2x^2 + 2\sqrt{2}x^2 \cdot \cos \theta \\ 4 &= 1 + 2 + 2\sqrt{2} \cdot \cos \theta \\ 1 &= 2\sqrt{2} \cdot \cos \theta \\ \cos \theta &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

E o $\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Ficou-se com o valor positivo do seno, pois $\theta < 180^\circ$.

17. (Extraído do vestibular da UFU MG)

Observe que $\hat{A}DC = 60^\circ$ e como $AB = AC$, temos $\hat{A}CD = 45^\circ$. Pela lei dos senos temos

$$\begin{aligned} \frac{AC}{\sin 60^\circ} &= \frac{AD}{\sin 45^\circ} \\ AD &= \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ cm.} \end{aligned}$$

18. (Extraído do vestibular da FUVEST SP)

Pela lei dos cossenos temos

$$\begin{aligned} BD^2 &= \sqrt{3}^2 + 2^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ \\ BD &= 1 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Outra, como $BD = DC$, temos $AC = AD + DC = 3$ cm e, pela lei dos cossenos, chegamos a

$$\begin{aligned} BC^2 &= \sqrt{3}^2 + 3^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \cos 30^\circ \\ BD &= \sqrt{3} \text{ cm.} \end{aligned}$$

19. (Extraído do vestibular da UNB)

Da lei dos senos temos que

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = 2 \cdot 14, \text{ daí } AB = 14 \text{ cm.}$$

20. (Extraído do vestibular da UNIFOR CE) Pela teoria dos ângulos central e inscrito na circunferência teremos $\hat{B}AC = 60^\circ$, e pela lei dos cossenos temos

$$\begin{aligned} BC^2 &= 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos 60^\circ \\ BC &= \sqrt{63} \\ BC &\cong 7,9 \end{aligned}$$

$AB + BC + CA \cong 22,9$ cm, que está na letra **E**.

21. (Extraído do vestibular do ITA)

Observe que se a hipotenusa $BC = x$, então $AB = \frac{x}{2}$.

Agora, no $\triangle ADB$, como D é incentro, teremos $\hat{D}AB = 45^\circ$, $\hat{A}BD = 30^\circ$ e $\hat{A}DB = 105^\circ$. O $\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ e, pela lei dos senos, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin 105^\circ} &= \frac{BD}{\sin 45^\circ} \\ \frac{x}{2} &= \frac{\sin 105^\circ}{\sin 45^\circ} \\ \frac{x}{2} &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \frac{x}{2} &= \frac{4}{\sqrt{2}} \\ x &= 1 + \sqrt{3} \text{ cm.} \end{aligned}$$

22. (Extraído do vestibular do UFBA)

Observe que $\hat{A}BD = 15^\circ$ e pela lei dos senos chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{BD}{\sin 45^\circ} &= \frac{AD}{\sin 15^\circ} \\ \frac{x}{5} &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} \\ x &= \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \\ x &= \frac{10}{\sqrt{3} - 1} \\ x &= 5(\sqrt{3} + 1) \text{ u.c..} \end{aligned}$$

Agora, pela lei dos cossenos, obtemos

$$\begin{aligned} BC^2 &= 10^2 + (5(\sqrt{3} + 1))^2 - 2 \cdot 10 \cdot 5(\sqrt{3} + 1) \cdot \cos 60^\circ \\ BC &= \sqrt{150} \\ &= 5\sqrt{6} \text{ u.c..} \end{aligned}$$

23. (Extraído do vestibular do UNB)

Observe que se $CD = x$, então $AC = x\sqrt{3}$. Agora, no $\triangle ABC$ teremos $\hat{A}CB = 45^\circ$, pela lei dos senos, obtemos

$$\frac{AB}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{AC}{\text{sen } 60^\circ}$$

$$x = \frac{30}{\sqrt{2}} \text{ metros,}$$

e dividindo o resultado por $\sqrt{2}$ obtemos $\frac{x}{\sqrt{2}} = 15$.

24.

a) (Extraído do material do PROFMAT)

Usando a lei dos senos temos que

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} = 2R$$

o que implica

$$\frac{a+b+c}{\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta + \text{sen } \gamma} = 2R$$

$$\frac{\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta + \text{sen } \gamma}{a+b+c} = \frac{1}{2R}$$

$$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta + \text{sen } \gamma = \frac{a+b+c}{2R}$$

$$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta + \text{sen } \gamma = \frac{p}{R}$$

b) (Extraído da Olimpíada de Matemática da Rússia)

Como os senos são racionais, a sua divisão é racional. Agora, usando a lei dos senos temos que:

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$

Isso implica que

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \alpha}$$

Ou seja, $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$, analogamente $\frac{c}{a} \in \mathbb{Q}$. Agora pela lei dos cossenos, obteremos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$1 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} - 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}{2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a}}$$

portanto, como o numerador e denominador são racionais,

$$\cos \alpha \in \mathbb{Q}.$$

Analogamente, $\cos \beta \in \mathbb{Q}$ e $\cos \gamma \in \mathbb{Q}$. ■

25. (Extraído do vestibular da FUVEST SP)

Pelo Teorema de Pitágoras podemos calcular o valor x de cada diagonal fazendo

$$\left(\sqrt{1+\sqrt{3}}\right)^2 + 1^2 = x^2$$

$$x = \sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Agora, na base também há um triângulo equilátero formado pelas bases do livro e seus extremos. Observe que podemos formar um triângulo entre as diagonais das páginas e seus extremos e, pela lei dos cossenos,

$$1^2 = 2 \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{2 \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 - 1}{2 \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = 30^\circ.$$

26. (Extraído da Olimpíada Paraibana de Matemática)

Sejam $\hat{B}AC = \theta$, $\hat{A}BC = 2\theta$ e $AC = x$. Pela lei dos senos temos que

$$\frac{x}{\text{sen } 2\theta} = \frac{0,5}{\text{sen } \theta}$$

$$\frac{x}{2 \text{sen } \theta \cos \theta} = \frac{0,5}{\text{sen } \theta}$$

$$x = \cos \theta.$$

Agora, pela lei dos cossenos, teremos

$$0,5^2 = 1^2 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \cos \theta$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Observe que $AC^2 + BC^2 = AB^2$ então, pela recíproca do Teorema de Pitágoras, $\triangle ABC$ é retângulo em C, e sua área será

$$S = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^2.$$