Estatística Básica I

As diferentes Médias

1° **ano E.M.**

Portal da Matemática
OBMEP

Estatística Básica I
As diferentes médias

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. A média aritmética de uma lista de números é a soma deles dividida pela quantidade de elementos da lista. Por exemplo, a média aritmética da lista 3, 3, 4, 5 e 10 é

$$\frac{3+3+4+5+10}{5} = 5.$$

A média aritmética de 5 inteiros positivos **distintos** é igual a 11. Qual é o maior valor possível de um número dessa lista?

Exercício 2. Se $x \geq 0$, prove que $1 + x \geq 2\sqrt{x}$.

Exercício 3. Mostre que $x^2 + y^2 \geq 2xy$ quaisquer que sejam os reais x e y.

Exercício 4. Para todo ângulo agudo α, mostre que $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha \geq 2$.

Exercício 5. Prove que se $a + b = 1$, em que a e b são números positivos, então

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Exercício 6. Prove que dados três números positivos a, b e c, vale que

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Exercício 7. Considere 6 números positivos $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. Prove a seguinte desigualdade:

$$\sqrt[3]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \sqrt[3]{b_1b_2b_3}.$$

Exercício 8. Dados n números positivos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Prove que

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

Exercício 9. Prove que para quaisquer dois números positivos a e b temos

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \frac{a+bn}{n+1},$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, $a = b$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 10. Para quais valores reais de x a fração abaixo atinge o seu valor mínimo?

$$\frac{a+bx^4}{x^2}. \ (a \text{ e } b \text{ positivos}).$$

Exercício 11. Prove que a soma dos comprimentos dos catetos de um triângulo retângulo nunca excede $\sqrt{2}$ vezes a hipotenusa do triângulo.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 12. Sejam a, b, c reais não-negativos, prove que: $a^3 + b^3 + c^3 + 15abc \leq 2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

Exercício 13. Prove que $(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$ para quaisquer números reais a, b e c.

Exercício 14. Sejam a, b e c números reais positivos. Prove que

$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

Exercício 15. Prove que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > n(\sqrt[n]{n+1} - 1).$$

Exercício 16. Mostre que $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$.

Exercício 17. Se $a_i > 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ e $a_1a_2\ldots a_n = 1$, mostre que

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2^n.$$

Exercício 18. Para $a, b, c, d \geq 0$, mostre que

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Exercício 19. Mostre que para quaisquer números reais a, b, c temos

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

Exercício 20. Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, mostre que

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1.$$

Exercício 21. Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais positivos, mostre que

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

Exercício 22. Se a, b, c, d são números reais positivos, mostre que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

Exercício 23. Dado que a equação $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ possui 4 raízes reais positivas, prove que

i) $pr - 16s \geq 0$.

ii) $q^2 - 36s \geq 0$.

Exercício 24. Sejam $x_1, x_2, ...x_n$ e $y_1, y_2, ..., y_n$ reais não-negativos tais que $x_i + y_i = 1$ para cada $i = 1, 2, ..., n$. Prove que:

$$(1 - x_1x_2...x_n)^m + (1 - y_1^m)(1 - y_2^m)...(1 - y_n^m) \geq 1,$$

onde m é um inteiro positivo arbitrário.

Respostas e Soluções.

1. Como a média dos 5 inteiros é 11, a soma deles é $5 \cdot 11 = 55$. Como todos são inteiros positivos distintos, a soma de quatro deles é pelo menos $1+2+3+4 = 10$. Portanto, o quinto elemento é no máximo $55 - 10 = 45$. Assim, o maior valor possível de um número dessa lista é 45 e um exemplo em que isso acontece é com a lista $1, 2, 3, 4, 45$.

2. Como todo quadrado de um número real é não negativo, segue que

$$\begin{aligned}(\sqrt{x}-1)^2 &\geq 0\\ x+1 &\geq 2\sqrt{x}.\end{aligned}$$

3. Como $(x-y)^2 \geq 0$, segue que $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

4. Como $\alpha \in (0, \pi/2)$, segue que $\sin\alpha, \cos\alpha > 0$. Daí, pela desigualdade MA-MG, segue que

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha \geq 2\sqrt{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = 2.$$

5. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned}1 &= a+b\\ &\geq 2\sqrt{ab}\\ \frac{1}{ab} &\geq 4.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}a^2+b^2 &\geq 2ab\\ 2(a^2+b^2) &\geq (a+b)^2\end{aligned}$$

A expansão dos membros do lado esquerdo e a Desigualdade MA-MG produz

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 &=\\ \left(a^2+2+\frac{1}{a^2}\right) + \left(b^2+2+\frac{1}{b^2}\right) &=\\ \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) + (a^2+b^2)+4 &\geq\\ \frac{2}{ab} + \frac{(a+b)^2}{2} + 4 &\geq\\ 8+\frac{1}{2}+4 &= \frac{25}{2}.\end{aligned}$$

6. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned}a+b &\geq 2\sqrt{ab}\\ b+c &\geq 2\sqrt{bc}\\ a+c &\geq 2\sqrt{ac}\end{aligned}$$

Multiplicando as desigualdades anteriores, temos

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

7. Elevando ambos os membros da desigualdade ao cubo, precisamos mostrar que

$$\begin{aligned}(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3) &\geq a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 +\\ &+ 3\sqrt[3]{(a_1a_2a_3)^2b_1b_2b_3} +\\ &+ 3\sqrt[3]{a_1a_2a_3(b_1b_2b_3)^2}.\end{aligned}$$

O desenvolvimento de $(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)$, nos produz a soma

$$\begin{aligned}a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 &=\\ a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3 &+\\ a_1b_2b_3 + b_1a_2b_3 + b_1b_2a_3.\end{aligned}$$

para concluir o problema, basta aplicar a Desigualdade MA-MG nos termos:

$$\begin{aligned}a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3 &\geq 3\sqrt[3]{(a_1a_2a_3)^2b_1b_2b_3}\\ a_1b_2b_3 + b_1a_2b_3 + b_1b_2a_3 &\geq 3\sqrt[3]{a_1a_2a_3(b_1b_2b_3)^2}.\end{aligned}$$

8. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} &\geq\\ n\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_1}} &=\\ n.\end{aligned}$$

9. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned}\frac{a+bn}{n+1} &= \frac{a+b+b+b+\ldots+b}{n+1}\\ &\geq \sqrt[n]{ab^n}.\end{aligned}$$

10. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned}a+bx^4 &\geq 2x^2\sqrt{ab}\\ \frac{a+bx^4}{x^2} &\geq 2\sqrt{ab}\end{aligned}$$

Portanto, o valor mínimo da expressão dada é $2\sqrt{ab}$ e ocorre quando $a = bx^4$, ou seja, $x = \pm\sqrt[4]{a/b}$.

11. Sejam a e b os catetos de um triângulo retângulo e c a sua hipotenusa. Pela Desigualdade MA-MG e o Teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ &\leq 2(a^2+b^2)\\ &= 2c^2.\end{aligned}$$

Daí,

$$a+b \leq \sqrt{2}c.$$

12. Expandindo os termos do lado esquerdo e cancelando os termos comuns, é suficiente mostrar que

$$a^3+b^3+c^3+2ab^2+2ba^2+2ac^2+2a^2c+2b^2c+2bc^2 \geq 15abc.$$

Para verificar isso, basta rescrever a soma do lado esquerdo em mais parcelas e aplicar a Desigualdade MA-MG:

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3+(ab^2+ab^2)+(a^2b+a^2b) &\quad + \\ (a^2c+a^2c)+(ac^2+ac^2)+(b^2c+b^2c)+(bc^2+bc^2) &\quad \geq \\ 15\sqrt[15]{a^{15}b^{15}c^{15}} &\quad = \\ 15abc. & \end{aligned}$$

13. Como

$$\begin{aligned} (a+b)(a+c) &= a^2+ac+ab+bc \\ &= bc+a(a+b+c), \end{aligned}$$

pela Desigualdade MA-MG, temos

$$bc+a(a+b+c) \quad \geq \quad \sqrt{abc(a+b+c)}.$$

14. Como $(a+b)^2 \geq 4ab$, segue que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Usando as expressões análogas para os pares (a,c) e (b,c), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c} &\quad = \\ \left(\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}\right)+\left(\frac{1}{4a}+\frac{1}{4c}\right)+\left(\frac{1}{4b}+\frac{1}{4c}\right) &\quad \geq \\ \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}. & \end{aligned}$$

15. Pela desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{i} \\ &\geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{i+1}{i}} \\ &= \sqrt[n]{n+1}. \end{aligned}$$

16. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} &= \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &\geq 2. \end{aligned}$$

17. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\frac{1+a_i}{2} \geq \sqrt{a_i}.$$

Multiplicando essas Desigualdades para $i=1,2,\ldots,n$, temos

$$\begin{aligned} (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) &\geq \\ (2\sqrt{a_1})(2\sqrt{a_2})\ldots(2\sqrt{a_n}) &= 2^n. \end{aligned}$$

18. Elevando ambos os membros da desigualdade ao quadrado, temos

$$\begin{aligned} (a+c)(b+d) &\geq ab+2\sqrt{abcd}+cd \Leftrightarrow \\ ad+cb &\geq 2\sqrt{abcd} \end{aligned}$$

Pela Desigualdade MA-MG, segue que

$$ad+cb \geq 2\sqrt{(ad)(cb)}$$

e isso conclui a demonstração.

19. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &\geq 2ab \\ a^2+c^2 &\geq 2ac \\ b^2+c^2 &\geq 2bc \end{aligned}$$

Somando as desigualdades anteriores, temos

$$\begin{aligned} 2(a^2+b^2+c^2) &\geq 2(ab+ac+bc) \\ a^2+b^2+c^2 &\geq ab+ac+bc \end{aligned}$$

20. Como $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned} 2(a^2+b^2+c^2) &\geq 2(ab+ac+bc) \\ 1 &\geq ab+ac+bc. \end{aligned}$$

Além disso, como $(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2 \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned} 2(a^2+b^2+c^2) &\geq -2(ab+ac+bc) \\ 1/2 &\geq -(ab+ac+bc). \end{aligned}$$

21. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned} (a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots\frac{1}{a_n}\right) &\quad \geq \\ (n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n})n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_n}} &\quad = \\ n^2. & \end{aligned}$$

22. Como $(a-b)^2 \geq 0$, segue que $(a+b)^2 \geq 4ab$ e daí

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Portanto, o uso reiterado dessa desigualdade nos permite concluir que

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} &\quad \geq \\ \frac{4}{a+b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} &\quad \geq \\ \frac{16}{a+b+c}+\frac{16}{d} &\quad \geq \\ \frac{64}{a+b+c+d}. & \end{aligned}$$

23.

i) Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 as raízes da equação. Então temos

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4 &= -p \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4 &= q \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4 &= r \\ x_1x_2x_3x_4 &= s. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade MA-MH,

$$\begin{aligned} pr &= \\ \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4} \frac{x_1x_2x_3x_4}{x_i}\right) &= \\ \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i}\right) x_1x_2x_3x_4 &= \\ 16s. \end{aligned}$$

ii) Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned} q &= x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4 \\ &\geq 6(x_1^3x_2^3x_3^3x_4^3)^{1/6} \\ &= 6s^{1/2}. \end{aligned}$$

24. Considere n moedas viciadas, na qual a probabilidade da moeda i dar cara seja x_i, e portanto a probabilidade da moeda i dar coroa seja $1-x_i=y_i$. Quando lançamos as n moedas simultaneamente, a probabilidade de todas darem cara é $x_1x_2\ldots x_n$, logo a probabilidade de haver pelo menos uma coroa é de $1-x_1x_2\ldots x_n$. Considere os seguintes eventos:

A) Lançamos as n moedas simultaneamente, m vezes. Em cada um desses m lançamentos "coletivos"aparece pelo menos uma coroa.

B) Lançamos as n moedas simultaneamente, m vezes. Nos m lançamentos da moeda i apareceu pelo menos uma cara, para todo $i=1,2,\ldots,n$.

A probabilidade do evento A ocorrer é de $(1-x_1x_2\ldots x_n)^m$. Por outro lado quando lançamos m vezes a moeda i, a probabilidade dela dar coroa em todos os lançamentos é y_i^m; logo, a probabilidade de a moeda i constribuir com pelo menos uma cara é $1-y_i^m$. A probabilidade do evento B ocorrer é $(1-y_1^m)(1-y_2^m)\ldots(1-y_n^m)$.

Observe agora que, em qualquer lançamento das n moedas, m vezes, pelo menos um dos dois eventos, A ou B, deve ocorrer. Para ver isso, suponha que A não ocorre; então houve pelo menos um dos n lançamentos onde todas as moedas deram cara, e isso já garante que B aconteceu. Sendo assim:

$$prob(A)+prob(B)\geq 1,$$

PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM