Módulo Vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2$

Produto Vetorial

3° ano E.M.

Produto Vetorial

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine o resultado dos produtos vetoriais a seguir:

a) $(1,2,3) \times (3,4,5)$.

b) $(4,2,4) \times (0,0,1)$.

c) $(1,2,7) \times (2,4,14)$.

Exercício 2. Calcule $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ se $\mathbf{a} = \mathbf{2}$, $\mathbf{b} = \mathbf{4}$ e o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é $\theta = 45°$.

Exercício 3. Calcule $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ se $\mathbf{a} = \mathbf{3}$, $\mathbf{b} = \mathbf{5}$ e o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é $\theta = 60°$.

Exercício 4. Calcule $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ se $\mathbf{a} = \mathbf{4}$, $\mathbf{b} = \mathbf{8}$ e o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é $\theta = 30°$.

Exercício 5. Se $\mathbf{a} = \mathbf{4i} + \mathbf{2j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{2i} - \mathbf{6j} - \mathbf{3k}$, encontre um vetor que é simultaneamente perpendicular a $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Exercício 6. Encontre o vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ quando $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Exercício 7. Encontre o vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ quando $\mathbf{a} = \mathbf{4i} + \mathbf{5j} + \mathbf{7k}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{2i} + \mathbf{3j} - \mathbf{4k}$.

Exercício 8. Encontre o vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ quando $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{7k}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{3j} - \mathbf{4k}$.

Exercício 9. Encontre o vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ quando $\mathbf{a} = \mathbf{3i} + \mathbf{5j} + \mathbf{1k}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{6i} + \mathbf{10j} + \mathbf{10k}$.

Exercício 10. Encontre um vetor não-nulo perpendicular a $\mathbf{u} = (\mathbf{4}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$ e $\mathbf{v} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 11. Encontre o vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ quando $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{2j} + \mathbf{3k}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{5i} + \mathbf{3j} - \mathbf{k}$.

Exercício 12. Encontre um vetor não-nulo perpendicular a $\mathbf{u} = (\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4})$ e $\mathbf{v} = (-\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\mathbf{2})$.

Exercício 13. Encontre a área do triângulo defido pela origem e os vetores $\mathbf{u} = (\mathbf{8}, -\mathbf{3}, \mathbf{1})$ e $\mathbf{v} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$.

Exercício 14. Encontre a área do triângulo defido pelos vetores $\mathbf{u} = (\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$ e $\mathbf{v} = (\mathbf{5}, -\mathbf{1}, \mathbf{2})$.

Exercício 15. Encontre a área do triângulo defido pelos vetores $\mathbf{u} = (\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4})$ e $\mathbf{v} = (-\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\mathbf{2})$.

Exercício 16. Encontre a área de um triângulos cujos vértices são $A = (1,1)$, $B = (2,3)$ e $C = (4,7)$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 17. Encontre a área do paralelogramo em $\mathbb{R}^3$ sabendo que três de seus vértices são $A = (1,1,3)$, $B = (2,3,2)$ e $C = (3,2,6)$.

Exercício 18. Um triângulo no $\mathbb{R}^3$ possui vértices dados por $A = (1,-2,0)$, $B = (2,1,-2)$ e $C = (6,-1,-3)$. Determine a sua área.

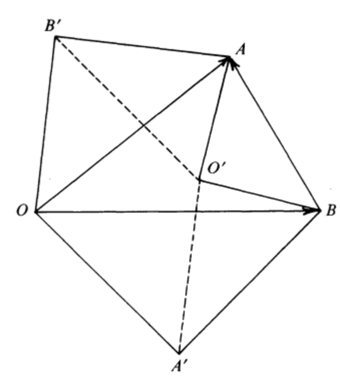
Exercício 19. Suponha que $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ é um vetor que está no primeiro quadrante do plano xy com comprimento 3 e que $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ é um vetor que está ao longo do eixo z, no sentido positivo, e tem comprimento 5. Seja $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$,

(a) Calcule $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

(b) Verifique que $y \leq z \leq x$.

Exercício 20. Sejam $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ um hexágono convexo tendo lados opostos paralelos. Prove que os triângulos $A_1A_3A_5$ e $A_2A_4A_6$ possuem áreas iguais.

Exercício 21. Os triângulos isósceles OAB, OBA' e ABO', todos semelhantes entre si, são construídos sobre os lados do triângulo OAB, externamente, externamente e internamente, respectivamente, como indica a figura a seguir. Prove que $OA'O'B'$ é um paralelogramo.



Respostas e Soluções.

1.

a) $(1,2,3) \times (3,4,5) = (-2,4,-2)$.

b) $(4,2,4) \times (0,0,1) = (2,-4,0)$.

c) $(1,2,7) \times (2,4,14) = 0$. Note que os vetores são paralelos.

2. Temos $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \mathbf{45}^\circ = \mathbf{4}\sqrt{\mathbf{2}}$.

3. Temos $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \mathbf{60}^\circ = \dfrac{\mathbf{15}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$.

4. Temos $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \mathbf{30}^\circ = \mathbf{16}$

5. Um vetor possível é $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-\mathbf{12}, \mathbf{10}, -\mathbf{28})$.

6. Temos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-2,2,0). \end{aligned}$$

7. Temos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} \\ &= (-41,30,2). \end{aligned}$$

8. Temos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} \\ &= (-21,4,3). \end{aligned}$$

9. Temos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & 10 \end{vmatrix} \\ &= (0,0,0). \end{aligned}$$

10. Uma opção é

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-2,-3,1). \end{aligned}$$

11. Temos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-11,16,-7). \end{aligned}$$

12. Uma opção é

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (-10,0,5). \end{aligned}$$

13. A área do triângulo é

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}{\mathbf{2}} &= 1/2 \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1/2 \cdot |(-1,1,11)| \\ &= \sqrt{31} \end{aligned}$$

14. A área do triângulo é

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}{\mathbf{2}} &= 1/2 \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1/2 \cdot |(2,-6,-8)| \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

15. A área do triângulo é

$$\begin{aligned}\frac{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|}{\mathbf{2}} &= 1/2\cdot\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 3 & 4\\ -1 & 1 & -2\end{vmatrix}\\ &= 1/2\cdot|(-10,0,5)|\\ &= \frac{5\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

16. Podemos considerar o triângulo $\triangle ABC$ no plano xyz escrevendo $A=(1,1,0)$, $B=(2,3,0)$ e $C=(4,8,0)$. Sejam $\mathbf{u}=\mathbf{B}-\mathbf{A}=(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{0})$ e $\mathbf{v}=\mathbf{C}-\mathbf{A}=(\mathbf{3},\mathbf{7},\mathbf{0})$. Assim, a área procurada é

$$\begin{aligned}\frac{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|}{\mathbf{2}} &= 1/2\cdot\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & 7 & 0\end{vmatrix}\\ &= 1/2\cdot|(0,0,1)|\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

17. Sejam $\mathbf{u}=\mathbf{B}-\mathbf{A}=(\mathbf{1},\mathbf{2},-\mathbf{1})$ e $\mathbf{v}=\mathbf{C}-\mathbf{A}=(\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{3})$. Assim, a área procurada é

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| &= \begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}\\ &= |(7,-5,-3)|\\ &= \sqrt{83}.\end{aligned}$$

18. Sejam $\mathbf{u}=\mathbf{B}-\mathbf{A}=(\mathbf{1},\mathbf{3},-\mathbf{2})$ e $\mathbf{v}=\mathbf{C}-\mathbf{A}=(\mathbf{5},\mathbf{1},-\mathbf{3})$. Assim, a área procurada é

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| &= \begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 3 & -2\\ 5 & 1 & -3\end{vmatrix}\\ &= |(-7,-7,-14)|\\ &= 7\sqrt{6}.\end{aligned}$$

19. Temos $\mathbf{u}=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{0})$, com a e b não negativos e tais que $a^2+b^2=9$. Além disso, $\mathbf{v}=(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{5})$.

a)

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| &= \begin{vmatrix} i & j & k\\ a & b & 0\\ 0 & 0 & 5\end{vmatrix}\\ &= |(5b,-5a,0)|\\ &= 5\sqrt{a^2+b^2}\\ &= 15.\end{aligned}$$

b) Como $a,b\geq 0$, temos $y=-5a\leq z=0\leq x=5b$.

20. Considere o hexágono no plano xy do sistema de coordenadas xyz, com a origem em qualquer lugar. Denote por $\mathbf{A_i}$ o vetor $\vec{OA_i}$. Como os lados opostos são paralelos, temos

$$\begin{aligned}(\mathbf{A_1}-\mathbf{A_2})\times(\mathbf{A_4}-\mathbf{A_5}) &=\\ (\mathbf{A_3}-\mathbf{A_2})\times(\mathbf{A_5}-\mathbf{A_6}) &=\\ (\mathbf{A_3}-\mathbf{A_4})\times(\mathbf{A_6}-\mathbf{A_1}) &= 0\end{aligned}$$

Expandindo essas equações e adicionando os resultados, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{A_1}\times\mathbf{A_3}+\mathbf{A_3}\times\mathbf{A_5}+\mathbf{A_5}\times\mathbf{A_1} &=\\ \mathbf{A_2}\times\mathbf{A_4}+\mathbf{A_4}\times\mathbf{A_6}+\mathbf{A_6}\times\mathbf{A_2}.\end{aligned}$$

A área $[A_1A_2A_3]$ do triângulo $\triangle A_1A_2A_3$ é

$$\begin{aligned}[A_1A_3A_5] &= \frac{|(\mathbf{A_1}-\mathbf{A_3})\times(\mathbf{A_1}-\mathbf{A_5})|}{\mathbf{2}}\\ &= \frac{|\mathbf{A_1}\times\mathbf{A_3}+\mathbf{A_3}\times\mathbf{A_5}+\mathbf{A_5}\times\mathbf{A_1}|}{\mathbf{2}}.\end{aligned}$$

De modo análogo,

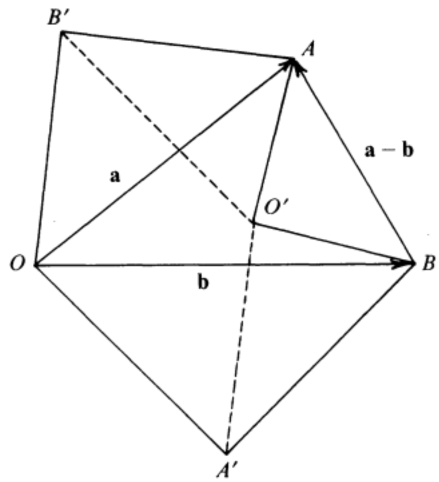
$$[A_1A_3A_5] = \frac{|\mathbf{A_2}\times\mathbf{A_4}+\mathbf{A_4}\times\mathbf{A_6}+\mathbf{A_6}\times\mathbf{A_2}|}{\mathbf{2}}.$$

Portanto, $[A_1A_3A_5]=[A_2A_4A_6]$.

21. Considere a figura no plano xy do sistema de coordenadas xyz, sendo O a origem. Como usual, $\mathbf{k}$ denota um vetor unitário na direção do eixo z e sentido positivo. Denote ainda por $\vec{OA}=\mathbf{a}$ e $\vec{OB}=\mathbf{b}$. Assim, $\mathbf{k}\times\mathbf{a}$ e $\mathbf{k}\times\mathbf{b}$ são normais a $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, respectivamente, e estão no plano xy. Como os triângulos isósceles são semelhantes, as alturas relativas às bases também são proporcionais. Assim, existe um real positivo m tal

$$\begin{aligned}\vec{OB'} &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{a}+\mathbf{m}(\mathbf{k}\times\mathbf{a})\\ \vec{OA'} &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{b}-\mathbf{m}(\mathbf{k}\times\mathbf{b})\\ \vec{OO'} &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{m}\mathbf{k}\times(\mathbf{a}-\mathbf{b}).\end{aligned}$$

Consequentemente $\vec{OO'} = \vec{OA'} + \vec{OB'}$ e, portanto, $OA'O'B'$ é um paralelogramo.



Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com