

Potenciação

Oitavo Ano



1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Calcule o valor das expressões:

- a) 3^5 .
- b) $2^2 + 3^2$.
- c) 5^4 .
- d) $2^3 + 3^3$.
- e) $\frac{1}{2} \cdot 2^4 \cdot 3$.

Exercício 2. Calcule o valor das expressões:

- a) $(0,01)^3$.
- b) $100 \cdot \frac{1}{5^2}$.
- c) $80 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3$.
- d) $\frac{1}{3} \cdot (0,3)^2$.
- e) $200 \cdot (0,04)^4$.

Exercício 3. Se $a = 2$ e $b = 3$, calcule o valor das expressões:

- a) $\frac{a^3b}{b^2}$.
- b) a^b .
- c) a^3b^2 .
- d) $(ab^2)^2$.
- e) $(b+a)^2 - a^2$.

Exercício 4. Escreva como um única potência:

- a) $\frac{2^4 \cdot 2^6}{3^7 \cdot 3^3}$.
- b) $\frac{4^6 \cdot 8^2}{16^3}$.
- c) $(-32)^{3^2}$.
- d) $\frac{10^5 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{10^{-7} \cdot 10^4}$.
- e) $8^3 : 2^{-5}$.

Exercício 5. Determine quais das seguintes sentenças são verdadeiras e quais são falsas. Em cada item falso, indique um contraexemplo para a afirmação.

a) $a^n b^n = (a \cdot b)^n$.

b) $a^{-n} = -a^n$.

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a-b)^n$.

d) $(a^n)^m = a^{nm}$.

e) $(a^n)^m = a^{(n^m)}$.

Exercício 6. Determine quais das seguintes sentenças são verdadeiras e quais são falsas. Em cada item falso, indique um contraexemplo para a afirmação.

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

b) $(a+b)^n = a^n + b^n$.

c) $a^{n+m} = a^n + a^m$.

d) $(a^n)^{-n} = a^0$.

e) Se $a \neq 0$ então $a^0 = 1$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Calcule as potências:

- a) $(0,3)^2$.
- b) $(0,3)^{-2}$.
- c) $(-0,02)^3$.
- d) $(-3)^{-2}$.
- e) $(1,2)^3$.

Exercício 8. Escreva cada um dos seguintes números como uma potência de 2:

- a) $(-0,5)^{-4}$.
- b) $[(-0,25)^2]^{-6}$.
- c) $16^2 : (0,25)^{-4}$.
- d) $32^{-2} : (0,25)^{-4}$.
- e) $0,16 \cdot 10^2$.

Exercício 9. Determine, em cada item, qual dos números é o maior.

- a) $2^{1/2}$ ou $2^{1/3}$.
- b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$ ou $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$.
- c) $3^{1/5}$ ou $5^{1/3}$.

Exercício 10. Dividindo-se o número 4^{4^2} por 4^4 obtemos o número:

- (a) 2 (b) 4^3 (c) 4^4 (d) 4^8 (e) 4^{12} .

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. Definamos a operação $a \otimes b$ como sendo a^b . Por exemplo, $2 \otimes 3 = 8$. Determine o valor de:

$$\frac{2 \otimes (2 \otimes (2 \otimes 2))}{((2 \otimes 2) \otimes 2) \otimes 2}.$$

(a) $\frac{1}{256}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) 1 (d) 4 (e) 256.

Exercício 12. Para os inteiros a e b definimos $a * b = a^b + b^a$. Se $2 * x = 100$, a soma dos algarismos de $(4x)^4$ é igual a:

(a) 20 (b) 25 (c) 30 (d) 35 (e) 27.

Exercício 13. Com quantos zeros termina o número $15^6 \cdot 28^5 \cdot 55^7$?

(a) 10 (b) 18 (c) 26 (d) 13 (e) 5.

Exercício 14. As potências 2^n e 5^n , onde n é um inteiro positivo, começam com o mesmo algarismo d . Qual é este algarismo?

Exercício 15. Se $a = 2^{40}$, $b = 3^{20}$ e $c = 7^{10}$, então:

(a) $c < b < a$ (b) $a < c < b$ (c) $b < a < c$
(d) $b < c < a$ (e) $c < a < b$.

Exercício 16. Quantos dos números abaixo são maiores que 10?

$3\sqrt{11}$, $4\sqrt{7}$, $5\sqrt{5}$, $6\sqrt{3}$, $7\sqrt{2}$.
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5.

Exercício 17. Quanto vale $\sqrt{12^{12}}$?

(a) 6^6 (b) $2^{2\sqrt{3}}$ (c) $2^{12} \cdot 3^6$
(d) 6^{12} (e) $\sqrt{12}^{\sqrt{12}}$.

Exercício 18. Se $2(2^{2x}) = 4^x + 64$, então x é igual a:

(a) -2 (b) -1 (c) 1 (d) 2 (e) 3.

1 Exercícios Introdutórios

1.

- a) 243.
- b) $4 + 9 = 13$.
- c) 625.
- d) $8 + 27 = 35$.
- e) $2^{4-1} \cdot 3 = 24$.

2.

- a) 0,000001.
- b) 4.
- c) $80 \cdot \frac{125}{8} = 1250$.
- d) $\frac{1}{3} \cdot 0,09 = 0,03$.
- e) $200 \cdot \frac{256}{10^8} = 0,000512$.

3.

- a) $\frac{8}{3}$.
- b) 8.
- c) 72.
- d) 324.
- e) $5^2 - 2^2 = 21$.

4.

- a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$.
- b) 2^6 .
- c) -2^{45} .
- d) 10^6 .
- e) 2^{14} .

5.

- a) Verdadeiro.
- b) Falso. Por exemplo, $2^{-1} = \frac{1}{2} \neq -2$.
- c) Falso. Por exemplo, $\left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4 \neq (2-1)^2 = 1$.
- d) Verdadeiro.

e) Falso. Por exemplo, $(2^2)^3 = 64 \neq 256 = 2^{(2^3)}$.

6.

- a) Verdadeiro.
- b) Falso. Por exemplo, $(1+2)^3 = 27 \neq 9 = 1^3 + 2^3$.
- c) Falso. Por exemplo, $2^{2+1} = 8 \neq 5 = 2^2 + 2^1$.
- d) Falso. Por exemplo, $(2^2)^{-2} = \frac{1}{16} \neq 1 = 2^0$.
- e) Verdadeiro.

2 Exercícios de Fixação

7.

- a) 0,09.
- b) $\frac{100}{9}$.
- c) $-0,000008$.
- d) $\frac{1}{9}$.
- e) 1,728.

8.

- a) $2^4 = 16$.
- b) 2^{24} .
- c) 1.
- d) 2^{-18} .
- e) 2^4 .

9.

a) Como $2^3 > 2^2$, segue que

$$2^{1/2} = (2^3)^{1/6} > (2^2)^{1/6} = 2^{1/3}.$$

b) Pelo item anterior, $2^{1/2} > 2^{1/3}$ e consequentemente $\frac{1}{2^{1/2}} < \frac{1}{2^{1/3}}$.

c) Como $3^3 < 5^5$, segue que $3^{1/5} = (3^3)^{1/15} < (5^5)^{1/15} = 5^{1/3}$.

10. $4^{4^2} : 4^4 = 4^{4^2-4} = 4^{12}$. Resposta E.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

11.

$$\begin{aligned}\frac{2 \otimes (2 \otimes (2 \otimes 2))}{((2 \otimes 2) \otimes 2) \otimes 2} &= \frac{2 \otimes (2 \otimes 4)}{(4 \otimes 2) \otimes 2} \\ &= \frac{2 \otimes 16}{16 \otimes 2} \\ &= \frac{2^{16}}{16^2} \\ &= 2^8.\end{aligned}$$

Resposta E.

12. Como $2 * x = 2^x + x^2$ e x é inteiro, devemos ter $x^2 \in \{1^2, 2^2, \dots, 10^2\}$. Dentre os elementos listados, o único possível para o qual $100 - x^2$ é uma potência de 2 é $x^2 = 36$ pois nesse caso $x = 6$ e $100 - x^2 = 64 = 2^6$. Consequentemente $(4x)^4 = 256x^4 = 256 \cdot 1296 = 331776$. Resposta E.

13.

$$\begin{aligned}15^6 \cdot 28^5 \cdot 55^7 &= (3^6 \cdot 5^6) \cdot (2^{10} \cdot 7^5) \cdot (5^7 \cdot 11^7) \\ &= 3^6 \cdot 11^7 \cdot 5^3 \cdot 10^{10}\end{aligned}$$

Logo, o número termina em 10 zeros. Resposta A.

14. Representemos os dígitos desconhecidos de 2^n e 5^n com asteriscos. Se k e l são as quantidades de algarismos de cada um deles, temos:

$$\begin{aligned}d \cdot 10^k < d * * * \dots * &= 2^n < (d+1) \cdot 10^k \\ d \cdot 10^l < d * * * \dots * &= 5^n < (d+1) \cdot 10^l\end{aligned}$$

Multiplicando ambas as inequações, obtemos $10^{k+l} \cdot d^2 < 10^n < 10^{k+l} \cdot (d+1)^2$. Cancelando 10^{k+l} em ambos os lados, concluímos que existe uma potência de 10 entre d^2 e $(d+1)^2$. Analisando os quadrados dos dígitos de 1 até 9, percebemos que isso ocorre apenas para $d = 3$ ($3^2 < 10 < 4^2$).

15. $a = 2^{40} = 16^{10}$, $b = 3^{20} = 9^{10}$ e $c = 7^{10}$. Como $16 > 9 > 7$, temos $a > b > c$. Resposta A.

16. Os quadrados dos números são respectivamente: 99, 112, 125, 108 e 98. Destes, apenas o primeiro e o último são menores que o quadrado de 10 que é 100. Assim, os três números do meio são maiores que 10. Resposta C.

17. $\sqrt{12^{12}} = 12^6 = (2^2 \cdot 3)^6 = 2^{12} \cdot 3^6$. Resposta C.

18.

$$\begin{aligned}64 &= 2(2^{2x}) - 4^x \\ &= 2 \cdot 2^{2x} - 2^{2x} \\ &= 2^{2x}.\end{aligned}$$

Como $64 = 2^6$, temos $2x = 6$. Resposta E.