Módulo de Progressões Aritméticas

Tópico Extra: PA de Segunda Ordem

1^a **série E.M.**

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

Portal da Matemática
OBMEP

Progressões Aritméticas
Tópico Extra: PA de Segunda Ordem

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Define-se, para sequências, o operador Δ, chamado de operador diferença, por $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$.

i) Dizemos que uma sequência (a_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é constante;

ii) Uma sequência na qual as diferenças $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ formam uma progressão aritmética não constante é chamada de progressão aritmética de segunda ordem.

Identifique entre as sequências abaixo aquelas que são progressões aritméticas de segunda ordem.

a) $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$

b) $(1, 3, 6, 10, 15, \ldots)$

c) $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$

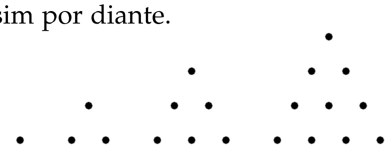
d) $(1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$

e) $(1, 5, 9, 13, 17, \ldots)$

Exercício 2. Foram repartidas cem medidas de trigo entre cinco pessoas de modo que, após elas serem ordenadas da que recebeu menos para a que recebeu mais, cada pessoa recebeu a mais que a anterior a mesma quantidade de trigo que a segunda recebeu a mais que a primeira. Além disso, as duas primeiras juntas receberam sete vezes a soma das medidas das três últimas juntas. Quanto recebeu cada pessoa?

Exercício 3. Qual o número de termos da sequência $(71, 72, 75, 80, 87, \ldots, 2007)$?

Exercício 4. "Números triangulares" são números que podem ser representados por pontos arranjados na forma de triângulos equiláteros. Apresentamos a seguir os primeiros números triangulares e definimos como T_n a representação do n-ésimo número triangular, então $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, e assim por diante.



Qual valor de T_{100}?

Exercício 5. O triângulo aritmético de Fibonacci é formado pelos números ímpares inteiros positivos a partir do 1 dispostos em linhas com ordem crescente em cada linha e pulando para a linha seguinte. A linha n possui exatamente n números. Veja as quatro primeiras linhas.

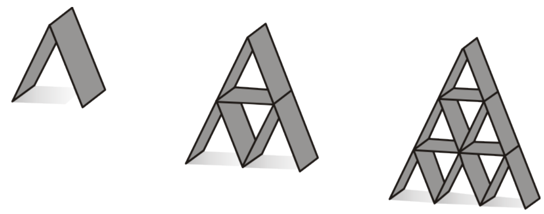
Linha 1 : **1**
Linha 2 : **3 5**
Linha 3 : **7 9 11**
Linha 4 : **13 15 17 19**
$\vdots$

Em qual linha aparecerá o 2013?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. A sequência $a_n = (1, 3, 7, 13, 21, \cdots)$ é uma P.A. de 2^a ordem. Sendo assim, calcule o valor de a_{20}.

Exercício 7. A figura abaixo mostra castelos de cartas de 1, 2 e 3 andares. De quantos baralhos de 52 cartas precisamos, no mínimo, para formar um castelo de 10 andares?



Exercício 8. É dada uma sequência (a_n), que não é necessariamente uma P.A., com $a_1 = 3$ e $a_2 = 5$. Sabe-se que as diferenças $b_n = a_{n+1} - a_n$ formam uma P.A. de razão 3. Sendo assim, qual o valor de a_8?

Exercício 9. Para 31 galinhas, planejou-se uma mesma quantidade de alimento a base de 100 gramas semanais para cada uma delas durante certo tempo. Entretanto, como a cada semana o número de galinhas diminuía em uma unidade, a reserva de alimento durou o dobro do planejado. Pergunta-se

a) seja q_n a quantidade de alimento no estoque para a semana n,

b) qual a quantidade de alimento foi reservada?

c) para quanto tempo foi reservado o alimento?

d) por quanto tempo durou o alimento reservado?

Exercício 10. Considere a sequência (a_n), $n \geq 1$ definida como indicado abaixo:

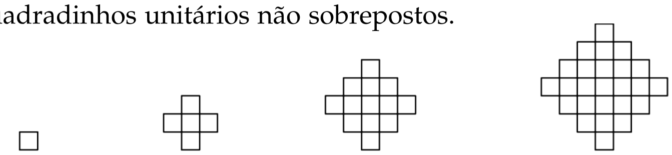
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2 + 3$$
$$a_3 = 4 + 5 + 6$$
$$a_4 = 7 + 8 + 9 + 10$$
$$\vdots$$

a) O termo a_{10} é a soma de 10 inteiros consecutivos. Qual é o menor e o qual é o maior desses inteiros?

b) Calcule a_{10}.

c) Forneça uma expressão geral para o termo a_n.

Exercício 11. Considere as figuras abaixo com 1, 5, 13 e 25 quadradinhos unitários não sobrepostos.



Caso o padrão seja mantido:

a) quantos quadradinhos unitários haverá na próxima figura (figura 5)?

b) qual a fórmula f_n do total de quadradinhos unitários em cada figura?

c) quantos quadrinhos unitários haverá na centésima primeira figura?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 12. Uma seqüência de números reais é dita uma progressão aritmética de segunda ordem quando a seqüência formada pelas diferenças entre termos sucessivos for uma progressão aritmética. Assinale a alternativa na qual se encontra parte de uma progressão aritmética de segunda ordem.

a) $(0, 5, 12, 21, 23)$

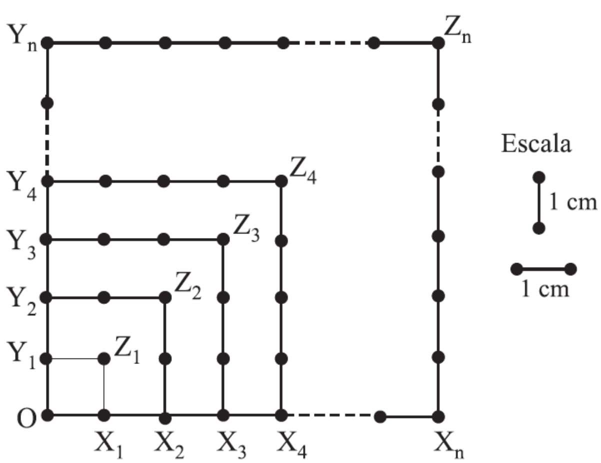
b) $(6, 8, 15, 27, 44)$

c) $(-3, 0, 4, 5, 8)$

d) $(7, 3, 2, 0, -1)$

e) $(2, 4, 8, 20, 30)$

Exercício 13. Considere a figura, onde estão sobrepostos os quadrados $OX_1Z_1Y_1$, $OX_2Z_2Y_2$, $OX_3Z_3Y_3$, $OX_4Z_4Y_4$, $\ldots$, $OX_nZ_nY_n$, $\ldots$, formados por pequenos segmentos medindo 1 cm cada um. Sejam A_n e P_n a área e o perímetro, respectivamente, do n-ésimo quadrado.



a) Mostre que a sequência $(P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots)$ é uma progressão aritmética, determinando seu termo geral, em função de n, e sua razão.

b) Considere a sequência $(B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots)$, definida por $B_n = \dfrac{A_n}{P_n}$. Calcule B_1, B_2 e B_3. Calcule, também, a soma dos 40 primeiros termos dessa sequência, isto é, $B_1 + B_2 + \ldots + B_{40}$.

Exercício 14. Temos 27 caixas em fila e cada uma delas contém pelo menos 12 bolinhas. A operação permitida é transferir uma bolinha de uma caixa para sua vizinha da direita, se essa vizinha da direita tem mais bolinhas. Dizemos que uma distribuição inicial das bolinhas é *feliz* se é possível, mediante uma sucessão de operações permitidas, fazer com que todas as bolinhas fiquem numa mesma caixa. Determine o menor número total de bolinhas de uma distribuição inicial *feliz*.

Respostas e Soluções.

1. Estudaremos os operadores diferença em cada item:

a) Como $\Delta_n = (n+1) - n = 1$ é constante, então a sequência é uma P.A.

b) Como $\Delta_n = n+1$ e $(2,3,4,\ldots)$ é uma P.A., essa sequência é uma P.A. de 2^a ordem.

c) Temos $\Delta = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$. A sequência não é uma P.A., pois o operador diferença não é constante. Além disso, ela também não é uma P.A. de segunda ordem, pois a sequência gerada pelo operador diferença, a saber, $(1,2,4,\ldots)$, não é uma P.A.

d) Como $\Delta_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ e $(3,5,7,9,\ldots)$ é uma P.A., essa sequência é uma P.A. de 2^a ordem.

e) Como $\Delta_n = 4$ para todo n, então a sequência é uma P.A..

2. (Adaptado de um problema do Papiro egípcio de Rind) As quantidades de medidas de trigo recebidas pelas pessoas formam uma progressão aritmética de 5 termos na qual a soma dos 3 últimos termos é igual a sete vezes a soma dos 2 primeiros. Sejam $a-2d$, $a-d$, a, $a+d$, $a+2d$ as medidas de trigo. A soma dos 5 termos é $5a = 100$, portanto uma das pessoas recebe 20 medidas de trigo. Além disso, temos que

$$a + (a+d) + (a+2d) = 7 \cdot [(a-2d) + (a-d)]$$

e, como $a = 20$, encontramos $d = \dfrac{55}{6}$. Daí as medidas de trigo distribuídas foram $\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{65}{6}$, 20, $\dfrac{175}{6}$ e $\dfrac{115}{3}$.

3. (Extraído do vestibular da ESPM (SP)) Podemos escrever uma nova sequência com n termos (um termo a menos que a do enunciado) observando apenas as diferenças entre os termos sucessivos (destacando a "razão" da P.A. de 2^a ordem) ficando com

$$(1,3,5,7,\ldots,2n-1),$$

sendo n a ordem do termo na sequência dos números ímpares. Agora, cada a_{n+1}, com $n \geq 1$, na sequência original pode ser escrito como 71 mais a soma dos ímpares de 1 até o $(n)-$ésimo ímpar, isto é,

$$a_{n+1} = 71 + (1+3+\ldots+2n-1).$$

Daí, fazemos

$$\begin{aligned}
2007 &= 71 + (1+3+\ldots+2n-1)\\
2007 &= 71 + \frac{(1+2n-1)\cdot n}{2}\\
1936 &= \frac{2n\cdot n}{2}\\
1936 &= n^2\\
n &= \pm\sqrt{1936}\\
n &= \pm 44.
\end{aligned}$$

Como n é positivo, $n = 44$ e existem $n+1 = 45$ termos.

4. Somando as quantidades de pontos das linhas de cada triângulo, cada número triangular n é a soma de 1 até o inteiro positivo n:

$$\begin{aligned}
T_1 &= 1\\
T_2 &= 1+2\\
T_3 &= 1+2+3\\
T_4 &= 1+2+3+4\\
&\vdots\\
T_{100} &= 1+2+3+\ldots+100\\
T_{100} &= \frac{(1+100)\cdot 100}{2} = 5050.
\end{aligned}$$

5. (Adaptado da OBM $-$ 2013) Note que na linha k aparecem exatamente os k ímpares que ainda não estão nas linhas anteriores e que o último número ímpar de uma linha j qualquer é o $\left[\dfrac{j\cdot(j+1)}{2}\right]-$ésimo impar. Dessa forma, temos que os k ímpares da linha k estão compreendidos no intervalo de $\left[\dfrac{(k-1)\cdot k}{2}+1\right]$ até $\left[\dfrac{(k+1)\cdot k}{2}\right]$. Como 2013 é o 1007º ímpar, para encontrarmos sua linha, devemos encontrar k inteiro que satisfaça:

$$\frac{(k-1)\cdot k}{2} + 1 < 1007 < \frac{(k+1)\cdot k}{2}.$$

A primeira desigualdade implica que $(k-1)^2 = k(k-1) - (k-1) \leq k(k-1) < 2\cdot 1006$, ou seja, $k < \sqrt{2012}+1 < 46$. A segunda desigualdade implica que $\dfrac{8057}{4} < \left(k+\dfrac{1}{2}\right)^2$ e consequentemente $\dfrac{\sqrt{8057}}{2} - \dfrac{1}{2} < k$. O único inteiro nesse intervalo é $k = 45$.

6. Destacando a sequência b_n das variações entre termos sucessivos obtemos

$$(2,4,6,8,\ldots),$$

que é uma P.A. de razão 2. Então podemos escrever que

$$\begin{aligned}
a_{20} &= a_1 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{19}\\
&= 1 + \frac{(b_1+b_{19})\cdot 19}{2}\\
&= 1 + \frac{(b_1+b_1+18d)\cdot 19}{2}\\
&= 1 + \frac{(2b_1+18d)\cdot 19}{2}\\
&= 1 + (b_1+9d)\cdot 19\\
&= 1 + (2+9\cdot 2)\cdot 19\\
&= 1 + 380\\
&= 381.
\end{aligned}$$

7. (Extraído do vestibular da FGV)
Analisando a sequência a_n das figuras temos que

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2\\
a_2 &= 2+1+4 = 7\\
a_3 &= 2+1+4+2+6 = 15\\
a_3 &= 2+(1+2)+(4+6) = 15
\end{aligned}$$

Para os próximos termos,

$$\begin{aligned}
a_4 &= 2+1+4+2+6+3+8 = 26\\
a_4 &= 2+(1+2+3)+(4+6+8) = 26\\
a_5 &= 2+1+4+2+6+3+8+4+10 = 40\\
a_5 &= 2+(1+2+3+4)+(4+6+8+10) = 40
\end{aligned}$$

Nas somas anteriores, destacamos separadamente as contagens das cartas usadas como paredes e das cartas usadas no chão de cada andar do castelo. Queremos agora estudar a sequência

$$(2, 7, 15, 26, 40, \ldots).$$

A variação b_n entre termos sucessivos pode ser listada em

$$(5, 8, 11, 14, \ldots).$$

Perceba que a segunda progressão é uma P.A. e a sequência original é uma P.A. de 2^a ordem.
Para calcularmos o a_{10}:

$$\begin{aligned}
a_{10} &= a_1 + b_1 + b_2 + \ldots + b_9\\
a_{10} &= 2+5+8+\ldots+5+8\cdot 3\\
&= 2+\frac{(5+29)\cdot 9}{2}\\
&= 5+17\cdot 9\\
&= 158.
\end{aligned}$$

Daí, como $3\cdot 52 < 158 < 4\cdot 52$, precisa-se de no mínimo quatro baralhos de 52 cartas.

8. (Extraído do Site TutorBrasil)
Perceba que a sequência a_n é uma P.A. de segunda ordem. Assim, podemos escrever $b_1 = a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$ e como b_n é uma P.A. de razão 3, podemos lista-la:

$$(2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20, \ldots)$$

Fazendo n variar de 2 a 7 na sequência

$$a_{n+1} = b_n + a_n$$

chegaremos em a_8 como

$$\begin{aligned}
n = 2 &\implies a_3 = b_2 + a_2 = 5+5 = 10\\
n = 3 &\implies a_4 = b_3 + a_3 = 8+10 = 18\\
n = 4 &\implies a_5 = b_4 + a_4 = 11+18 = 29\\
n = 5 &\implies a_6 = b_5 + a_5 = 14+29 = 43\\
n = 6 &\implies a_7 = b_6 + a_6 = 17+43 = 60\\
n = 7 &\implies a_8 = b_7 + a_7 = 20+60 = 80.
\end{aligned}$$

9. A quantidade q_1 de alimento era

$$q_1 = 31\cdot 100\cdot t = 3100t,$$

onde t é o tempo inicialmente planejado do enunciado. Entretanto, na segunda semana, foram gastos 100 g a menos de alimento, na terceira 200 g, com acumulado de $100+200 = 300$ g, na 3^a semana foram $100+200+300 = 600$ g e assim sucessivamente. Com a perda semanal de uma galinha, podemos escrever a sequência q_n de alimentos no estoque como

$$\begin{aligned}
q_1 &= 31\cdot 100\cdot t = 3100t\\
q_2 &= 3001t - 100\\
q_3 &= 3100t - 300\\
q_4 &= 3100t - 600\\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

Assim, a perda semana varia com números triangulares (multiplicados por 100) e podemos escrever q_n como

$$\begin{aligned}
q_n &= 3100t - [100+200+300+\ldots+100\cdot(n-1)]\\
q_n &= 3100t - 100[1+2+3+\ldots+(n-1)]\\
q_n &= 3100t - 100\cdot\frac{(1+(n-1))\cdot(n-1)}{2}\\
q_n &= 3100t - 100\cdot\frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}$$

Como a quantidade inicial ($3100t$) durou o dobro do tempo ($2t$), temos que

$$\begin{aligned}
q_{2t} &= 3100\cdot(2t) - 100\cdot\frac{2t(2t-1)}{2}\\
3100t &= 3100\cdot(2t) - 100\cdot t(2t-1)\\
31t &= 31\cdot(2t) - t(2t-1)\\
2t^2 - t - 62t + 31t &= 0\\
2t^2 - 32t &= 0\\
t(t-16) &= 0\\
t &= 16
\end{aligned}$$

(perceba que a solução nula não convém).

Assim, temos que

a) $q_n = 3100t - 100\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}$;

b) $q_1 = 3100\cdot 16 = 49600$ g;

c) $t = 16$ semanas; e

d) $2t = 32$ semanas.

10. (Extraído do material do PROFMAT)

a) O primeiro inteiro da soma que define a_n é igual ao número de inteiros utilizados nos termos anteriores mais um, isto é,

$$\begin{aligned}\text{Primeiro} &= 1+2+...+n-1+1\\ &= \frac{(1+n-1)(n-1)}{2}+1\\ &= \frac{n^2-n+2}{2}\end{aligned}$$

E cada a_n possui n parcelas, com diferença de uma unidade entre elas, portanto o último inteiro é esse número mais $n-1$, que fica igual a

$$\text{Último} = \frac{(1+n-1)(n-1)}{2}+1+n-1 = \frac{n^2+n}{2}.$$

Portanto, para $n = 10$, o primeiro inteiro é 46 e o último é 55.

b) Observe que $a_{10} = 46+47+48+\cdots+55$ e podemos calculá-lo como a soma de 10 termos em uma P.A., ou seja, $a_{10} = \dfrac{(46+55)\cdot 10}{2} = 505$.

c) Perceba que a_n é a soma de n inteiros consecutivos começando em $\dfrac{n^2-n+2}{2}$ e terminando em $\dfrac{n^2+n}{2}$ e substituindo na fórmula da soma da P.A. ficamos com

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{(a_1+a_n)n}{2}\\ &= \frac{\left(\dfrac{n^2-n+2}{2}+\dfrac{n^2+n}{2}\right)n}{2}\\ &= \frac{(n^2+1)n}{2}\\ S_n &= \frac{n^3+n}{2}\end{aligned}$$

Outra solução:
Um outra forma de calcularmos o termo geral é destacando uma nova sequência b_n composta pelo primeiro termos da soma que gera cada a_n. Asim temos uma P.A. de 2^a ordem, descrita abaixo. A P.A. c_n das diferenças entre termos sucessivos está logo à direita:

$$(1,2,4,7,11,\ldots) \text{ e } (1,2,3,4,\ldots).$$

Daí, cada b_{n+1} será

$$\begin{aligned}b_{n+1} &= 1+c_1+c_2+\ldots+c_n\\ b_{n+1} &= 1+(1+2+\ldots+n-1)\\ b_{n+1} &= 1+\frac{(1+n-1)\cdot(n-1)}{2}\\ b_{n+1} &= 1+\frac{n\cdot(n-1)}{2} = \frac{n^2-n+2}{2}.\end{aligned}$$

A sequência da resolução segue igual à solução anterior.

11. (Adaptado do AMC)
Temos

$$\begin{aligned}f_1 &= 1\\ f_2 &= 5\\ f_3 &= 13\\ f_4 &= 25\\ \vdots &= \vdots\end{aligned}$$

Perceba que a sequência a_n das diferenças entre termos sucessivos é uma P.A.

$$(4,8,12,\ldots),$$

De fato, uma figura é obtida da anterior através do acréscimo de quadradinhos aos lados e a dimensão de uma lateral nova é uma unidade maior que a anterior. Daí, a sequência f_n é uma P.A. de segunda ordem.

a) O que permite concluir que

$$f_5 = 25+16 = 41.$$

b) Na sequência, o termo geral a_n fica

$$\begin{aligned}a_n &= 1+(4+8+12+\cdots+4\cdot(n-1))\\ a_n &= 1+4\cdot(1+2+3+\cdots+(n-1))\\ a_n &= 1+4\cdot\frac{[1+(n-1)]\cdot(n-1)}{2}\\ a_n &= 1+4\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

c) Daí,

$$a_{101} = 1+4\cdot\frac{101\cdot(101-1)}{2} = 20201.$$

12. (Extraído do vestibular da UFC)
Construindo as sequências das diferenças obtemos

a) $(5,7,9,2)$

b) $(2,7,12,17)$

c) $(3,4,1,3)$

d) $(-4,-1,-2,-1)$

e) $(2,4,12,10)$

Apenas $(2,7,12,17)$ representa uma parte de uma progressão aritmética. Portanto apenas a sequência $(6,8,15,27,44)$ contém parte de uma P. A. de segunda ordem. Sendo assim, ficamos com a resposta na letra B.

13. (Extraído do vestibular da UNESP)

a) Observe que $P_1 = 4$, $P_2 = 8$, $P_3 = 12$ e, de modo geral, $P_n = 4 \cdot n$. Assim, podemos concluir que P_n é uma P.A. de diferença comum (razão) igual a 4.

b) Nessa linha, podemos escrever $A_1 = 1$, $A_2 = 4$, $A_3 = 9$, $\ldots$, $A_n = n^2$. Daí, $B_n = \dfrac{A_n}{P_n} = \dfrac{n^2}{4n} = \dfrac{n}{4}$, ou seja, uma P.A. de razão $\dfrac{1}{4}$. O que faz

$$\begin{aligned}
&B_1 + B_2 + \ldots + B_{40} = \\
&\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{40}{4} = \\
&\frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{40}{4}\right) \cdot 40}{2} = \frac{41 \cdot 10}{2} = 205.
\end{aligned}$$

14. (Extraído da Olimpíada de Maio $-$ 2012**)**
Uma ideia importante é estudar casos particulares do problema, com menos caixas (e se quiser, menos bolas por caixa). Se fossem só 3 caixas, um exemplo com a quantidade mínima é obtido com 12 bolas na primeira, 13 na segunda e 15 na terceira. Para ver isso, note que a primeira caixa deve possuir pelo menos 12 bolas e, para que ocorra o fluxo de transferências total, se a diferença entre as duas últimas caixas é 1, a diferença entre a primeira e a segunda deve ser de pelo menos 2 e assim a quantidade mínima de bolas é pelo menos $12 + 12 + 12 + 1 + 2 = 39$.

Para o caso geral, se duas das caixas que não estão nas extremidades diferem por apenas uma unidade, o fluxo de transferências entre elas é interrompido caso a da esquerda receba uma bola ou a da direita perca uma bola. Além disso, se a diferença inicial entre elas for pelo menos 2, sempre é possível passar uma das bolas mais a esquerda para a caixa mais a direita, pois a diferença entre elas ao longo do processo de transferências será de pelo menos uma unidade. Assim, uma distribuição com a quantidade mínima é

$$(12, 13, 15, 17, \ldots)$$

Como a diferença entre as caixas é de 2 unidades, a partir da 3^a caixa, a 27^a caixa terá $13 + 25 \times 2 = 63$ bolinhas. Agora, da caixa 2 até a caixa 27, ficamos com uma progressão aritmética com diferença constate (razão) 2, e soma

$$S_{26} = \frac{13 + 63 \times 26}{2} = 988 \text{ bolinhas.}$$

Agregando as 12 bolinhas da caixa 1, teremos com 1000 bolinhas.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com