Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 2

Exercícios – Conceito de Função

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Material elaborado por Letícia Mattos

Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 2
Exercícios – Conceito de Função

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine o maior domínio possível para a função

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}.$$

Exercício 2. Determine o maior domínio possível para as funções a seguir:

(a) $f(x) = \log_2[(x-2)(x-3)]$.

(b) $g(x) = \log_2(x-2) + \log_2(x-3)$.

Por que os domínios encontrados nos itens (a) e (b) são diferentes?

Exercício 3. Encontre o foco e a diretriz da parábola P dada pela equação

$$P(x) = (x-1)^2 + 2.$$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Sem usar derivadas, encontre a inclinação da reta tangente a parábola $p(x) = x^2$ em cada um dos seus pontos.

Exercício 5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática de equação

$$f(x) = x^2 + 2x + 4.$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$ e $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, encontre a inclinação da reta tangente que passa pelos pontos $(x, f(x))$ e $(x+h, f(x+h))$.

Exercício 6. Para cada um dos itens abaixo, diga se a afirmativa é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.

(a) Se $[f(x)]^2$ é uma função contínua em um intervalo, então $f(x)$ também é contínua no mesmo intervalo.

(b) Se $[f(x)]^3$ é uma função contínua em um intervalo, então $f(x)$ também é contínua no mesmo intervalo.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 7. Seja $y = y(x)$ uma função definida pela equação

$$2^x + 2^y = 2.$$

Encontre o maior domínio dessa função.

Exercício 8. Seja f uma função quadrática com duas raízes distintas. Suponha que quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ satisfaçam a desigualdade

$$f(a^2 + b^2) \geq f(2ab).$$

Mostre que pelo menos uma das raízes de f é negativa.

Nos exercícios a seguir, k e n são números naturais, com $k \leq n$, e $[n] := \{1, 2, \cdots, n\}$.

Exercício 9. Encontre o número de funções injetivas $[k] \to [n]$.

Exercício 10. Encontre o número de funções sobrejetivas $[n] \to [k]$.

Respostas e Soluções.

1. Para que a função f esteja definida, é necessário e suficiente que o denominador da fração $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-5x+4}}$ seja maior que 0. E, como a raiz quadrada é definida apenas para números não-negativos, segue que devemos ter

$$x^2 - 5x + 4 > 0.$$

A desigualdade acima é equivalente a $(x-4)(x-1) > 0$. Esse produto é maior do que zero se $x-4>0$ e $x-1>0$, ou se $x-4<0$ e $x-1<0$. O primeiro caso é equivalente a $x>4$; já o segundo, equivale a $x<1$. Assim, concluímos que f está definida em todo domínio $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$.

2.

(a) O maior domínio possível para f é $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$. De fato, como a função logarítmo é definida apenas para números reais positivos, devemos ter $(x-2)(x-3) > 0$ para que f esteja bem definida. Isso acontece se, e somente se, $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

(b) O maior domínio possível para g é $(3, +\infty)$. De fato, para que g esteja bem definida, devemos ter $x-2>0$ e $x-3>0$. Isso implica que g está bem definida em todo intervalo $(3, +\infty)$.

Os resultados apresentados nos itens (a) e (b) são diferentes porque a regra

$$\log_2(ab) = \log_2 a + \log_2 b$$

só é válida para a, b reais positivos. Então, se $x \in (-\infty, 2)$, temos $(x-2)(x-3) > 0$, mas $x-2<0$ e $x-3<0$. Logo, a regra não é válida para $x \in (-\infty, 2)$, o que explica a diferença entre os resultados.

3. A parábola é o lugar geométrico de todos os pontos no plano que equidistam de um dado ponto e uma dada reta. Usualmente, esse ponto e essa reta são chamados de, respectivamente, *foco* e *diretriz*. Quando temos uma equação quadrática em x que define a parábola, sua diretriz é sempre uma reta horizontal. Em particular, o vértice da parábola é o ponto médio do menor segmento que liga o foco à diretriz (e esse segmento é horizontal). Sejam $r: \; y = c$ a diretriz e $F = (a, b)$ o foco da parábola P. Pela observação anterior, se x é a abscissa do vértice da parábola, então a abscissa do foco da parábola também deve ser igual a x. Além disso, denotando por y a ordenada do vértice da parábola, segue que

$$|y-c| = |y-b| \iff y = \frac{b+c}{2}. \qquad (1)$$

Uma vez que a equação da parábola é dada por $P(x) = (x-1)^2 + 2$, o seu vértice está no ponto $(1, 2)$. Juntando as observações que fizemos até agora, ficamos com

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + c = 4, \end{cases}$$

onde a segunda equação segue de (1), substituindo $y = 2$. Agora, para qualquer ponto p no plano, denotemos por $d(p, r)$ e $d(p, F)$ a distância entre p e r e entre p e F, respectivamente. Se $p = (x, y)$ pertence à parábola, então $d(p, F) = d(p, r)$, o que nos dá

$$\begin{aligned} d(p,F) = d(p,r) &\iff \\ \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = |y-c| &\iff \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = (y-c)^2. \end{aligned}$$

Substituindo $a = 1$ na equação anterior, segue que

$$\begin{aligned} 2(b-c)y &= x^2 - 2x + 1 + b^2 - c^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + 4(b-c) \\ &= (x-1)^2 + 4(b-c). \end{aligned}$$

Na última igualdade, utilizamos as identidades $b^2 - c^2 = (b-c)(b+c)$, $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ e a igualdade $b + c = 4$. Isso nos dá

$$y = \frac{(x-1)^2}{2(b-c)} + 2.$$

Para que essa equação seja a mesma que define nossa parábola, devemos ter $2(b-c) = 1$. Assim, segue que

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + c = 4 \\ b - c = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

o que nos dá $b = 9/4$ e $c = 7/4$. Logo, concluímos que a diretriz é a reta de equação $y = 7/4$ e o foco está no ponto $(1, 9/4)$.

4. Seja $a \in \mathbb{R}$ e $y(x) = mx + c$ a equação da reta tangente à parábola p no ponto $A = (a, a^2)$. Observe que A é o único ponto de interseção entre a reta tangente e a parábola. Logo, a equação

$$x^2 = mx + c$$

deve possuir apenas uma única solução, que deve ser $x = a$. Para que essa equação quadrática tenha solução única, devemos ter $m^2 + 4c = 0$. Além disso, como a solução deve ser $x = a$, devemos ter $a^2 = ma + c$. Isso nos dá o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} m^2 + 4c = 0 \\ ma + c = a^2 \end{cases}$$

Substituindo na 1ª equação o valor de c obtido pela 2ª equação, ficamos com

$$\begin{aligned} m^2 + 4(a^2 - ma) = 0 &\iff \\ (m-2a)^2 = 0 &\iff \\ m = 2a. \end{aligned}$$

Assim, segue que a inclinação da reta tangente à parábola p no ponto $A = (a, a^2)$ deve ser igual a $2a$.

5. A inclinação da reta é dada por $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Primeiro, vamos obter a expressão para a diferença $f(x+h)-f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= (x+h)^2+2(x+h)-x^2-2x \\ &= h^2+2hx+2h. \end{aligned}$$

Logo, a inclinação é dada por

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{h^2+2hx+2h}{h} \\ &= 2x+2+h. \end{aligned}$$

6.

(a) Falsa. Um contraexemplo seria uma função $f:[2,4]\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{se } 2\le x<3; \\ -x, & \text{se } 3\le x\le 4. \end{cases}$$

Observe que f é descontínua no ponto $x=3$, mas $[f(x)]^2$ é contínua, uma vez que $[f(x)]^2=x^2$ para todo $x\in[2,4]$.

(b) Verdadeira. Considere a função $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $h(x)=\sqrt[3]{x}$. Como h é função contínua, para todo $a\in\mathbb{R}$ e todo $\varepsilon>0$, existe $\delta=\delta(a,\varepsilon)>0$ tal que

$$|a-b|<\delta\Rightarrow|h(a)-h(b)|<\varepsilon. \qquad (2)$$

Agora, seja $g:[r,s]\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Então, para todo $x\in[r,s]$ e todo $\delta>0$ existe $\gamma=\gamma(x,\delta)>0$ tal que

$$|x-y|<\gamma\Rightarrow|g(x)-g(y)|<\delta. \qquad (3)$$

Agora, fixe $x\in[r,s]$ e $\varepsilon>0$. Por um lado, substituindo a por $g(x)$ e b por $g(y)$ em (2), temos que existe $\delta':=\delta(g(x),\varepsilon)>0$ tal que

$$|g(x)-g(y)|<\delta'\Rightarrow|h(g(x))-h(g(y))|<\varepsilon.$$

Por outro lado, (3) nos dá a existência de $\gamma:=\gamma(x,\delta')$ tal que

$$|x-y|<\gamma\Rightarrow|g(x)-g(y)|<\delta'.$$

Juntando as duas últimas implicações acima, segue que

$$|x-y|<\gamma\Rightarrow|h(g(x))-h(g(y))|<\varepsilon.$$

O que nos permite concluir que a composição $h\circ g$ é contínua. Concluímos que a afirmação é verdadeira substituindo g por f^3.

Observação: o leitor pode ver que o mesmo argumento vale para provar uma afirmação ainda mais geral. Se $f\circ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ e $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ são funções contínuas e f é uma bijeção, então g é função contínua.

7. Seja $x\in\mathbb{R}$. Existe $y=y(x)$ tal que $2^y=2-2^x$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} 2-2^x&>0 \\ 1&>x. \end{aligned}$$

Ou seja, o maior domínio da função y deve ser $(-\infty,1)$.

8. Primeiro, afirmamos que, para quaisquer $y\ge x\ge 0$, existem a,b tais que $a^2+b^2=y$ e $2ab=x$. De fato, basta tomar $a=\sqrt{\frac{y+x}{4}}+\sqrt{\frac{y-x}{4}}$ e $b=\sqrt{\frac{y+x}{4}}-\sqrt{\frac{y-x}{4}}$. Em particular, isso nos dá

$$f(y)=f(a^2+b^2)\ge f(2ab)=f(x).$$

Ou seja, f é uma função crescente no intervalo $[0,+\infty)$, o que também implica que f tem concavidade voltada para cima. Logo, se ambas as raízes, digamos, x_1 e x_2, fossem positivas, teríamos uma contradição, uma vez que f seria decrescente no intervalo $(x_1,(x_1+x_2)/2)\subset[0,+\infty)$.

9. Para encontrar o número de funções injetivas da forma $f:[k]\to[n]$, basta contar os possíveis valores que as imagens $f(1),\dots,f(k)$ podem assumir. Para que a função seja injetiva, todos esses valores devem ser distintos.

A imagem $f(1)$ pode assumir qualquer um dos n valores em $[n]$. Definido $f(1)$, $f(2)$ pode ser qualquer um dos $n-1$ valores em $[n]\setminus\{f(1)\}$; definidos $f(1)$ e $f(2)$, $f(3)$ pode assumir qualquer um dos $n-2$ valores em $[n]\setminus\{f(1),f(2)\}$; e assim por diante. Pelo princípio multiplicativo, segue que o número de funções injetivas $[k]\to[n]$ é igual a

$$n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

10. Para encontrar o número de funções sobrejetivas da forma $f:[n]\to[k]$, vamos contar o número total de funções $[n]\to[k]$ e subtrair aquelas que não são sobrejetivas. Faremos isso usando o princípio da inclusão-exclusão.

Para todo $i\in[n]$, defina

$$A_i=\{f:[n]\to[k]\mid i\notin f([n])\}.$$

Pelo princípio da inclusão-exclusão, temos que o número de funções não-sobrejetivas $[n]\to[k]$ é igual a

$$\sum_i|A_i|-\sum_{i_1<i_2}|A_{i_1}\cap A_{i_2}|+\ldots+(-1)^{r+1}\sum_{i_1<\cdots<i_r}|A_1\cap\cdots\cap A_r|+\cdots \qquad (4)$$

Agora, veja que, para todo $r\in[k]$ e $i_1<\cdots<i_r$, temos

$$|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_r}|=(k-r)^n.$$

Assim, a expressão em (4) é equivalente a

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k}{i}(k-i)^n.$$

Como o número de funções $[n]\to[k]$ é igual a k^n, utilizando a expressão anterior, concluímos que o número de funções sobrejetivas é igual a

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}\binom{k}{i}(k-i)^n.$$

Material elaborado por Letícia Mattos.