Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 1

Funções e Imagem

Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 1
Funções e Imagem

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Encontre a imagem das funções abaixo.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

(b) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$.

(c) $f : (-3, 4] \to \mathbb{R}, f(x) = |3x + 2|$.

(d) $f : (0, 2) \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 2x - 3$.

Exercício 2. Em cada item abaixo, encontre todos os pontos no domínio da função f para os quais a imagem pertence ao intervalo I.

(a) $f(x) = x^3$, $I = [27, 512]$.

(b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $I = [2, 3]$.

Exercício 3. Em cada item abaixo, diga se a função é bijetora, injetora ou sobrejetora.

(a) $f : \mathbb{R} \to [-5/4, +\infty), f(x) = x^2 + x - 1$.

(b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

(c) $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty), f(x) = x^2$.

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2^x$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Determine entre os retângulos de mesma área A aquele que tem o menor perímetro. Existe algum retângulo cujo perímetro seja maior do que os de todos os demais com mesma área?

Exercício 5. Dados a, b, c positivos, determinar x e y tais que $xy = c$ e que $ax + by$ seja o menor possível.

Exercício 6. Encontre todos os valores de a para os quais a equação

$$ax^2 - 5x + 2 = 0$$

tem apenas uma solução.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \text{ é racional,} \\ 3x, & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

Mostre que $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$, mas f não é linear.

Exercício 8. Prove que se a, b e c são inteiros ímpares, então as raízes de $y(x) = ax^2 + bx + c$ não são racionais.

Exercício 9. Dados quaisquer 3 pontos não-colineares no plano, digamos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3), mostre que existe uma única parábola que passa por esses pontos.

Respostas e Soluções.

1.

(a) A imagem é o intervalo $[0,\infty)$. De fato, $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Isso implica que $f(x) \in [0,\infty)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, dado $y \in [0,\infty)$, temos que $\sqrt{y} \in \mathbb{R}$ e que $f(\sqrt{y}) = y$. Portanto, $f(\mathbb{R}) = [0,\infty)$.

(b) A imagem é o intervalo fechado $[-3,1]$. A função f é contínua e crescente no intervalo $[-1,1]$, portanto a imagem deve ser igual ao intervalo fechado cujos extremos são $f(-1)$ e $f(1)$. Como $f(-1) = -3$ e $f(1) = 1$, tem-se que a imagem deve ser igual ao intervalo fechado $[-3,1]$. Também podemos resolver este item (e os demais) sem empregar a noção de continuidade: $2x-1 < -3$ se, e somente se, $x < -1$; analogamente, $2x-1 > 1$ se, e somente se, $x > 1$. Disso, concluímos que $f(x) \in [-3,1]$, para todo $x \in [-1,1]$. Reciprocamente, dado $y \in [-3,1]$, devemos verificar que existe $x \in [-1,1]$ tal que $f(x) = y$. De fato, tomando $x = (y+1)/2$, podemos verificar que $x \in [-1,1]$ e que $f(x) = y$, como gostaríamos.

Nos próximos itens, vamos encontrar a imagem das funções apenas usando a noção de continuidade. Mesmo que você não esteja familiarizado(a) com o conceito de continuidade, encorajamos você a encontrar as respostas utilizando a noção *intuitiva* de continuidade. Isto é, uma função é contínua se podemos esboçar o seu gráfico "sem tirar o lápis do papel". Uma vez que a resposta é encontrada utilizando essa intuição, formalize-a como fizemos nos itens (a) e (b).

(c) A imagem é o intervalo fechado $[0,14]$. Primeiro, observe que a função f é crescente no intervalo $[-2/3,4]$ e decrescente no intervalo $(-3,-2/3]$, uma vez que

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2, & \text{se } x \geq -2/3; \\ -3x-2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por um lado, a imagem $f([-2/3,4])$ deve ser o intervalo fechado formado pelos extremos $f(-2/3)$ e $f(4)$. Como $f(-2/3) = 0$ e $f(4) = 14$, ficamos com $f([-2/3,4]) = [0,14]$. Por outro lado, a imagem $f((-3,-2/3])$ deve ser o intervalo formado pelos extremos $f(-3)$ e $f(-2/3)$, fechado na extremidade $f(-2/3)$ e aberto na extremidade $f(-3)$. Como $f(-3) = -3(-3)-2 = 7$, ficamos com $f((-3,-2/3]) = [0,7)$. Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} f((-3,4]) &= f((-3,-2/3]) \cup f([-2/3,4]) \\ &= [0,7) \cup [0,14] \\ &= [0,14]. \end{aligned}$$

(d) A imagem é o intervalo $(-3,2]$. Como nos itens anteriores, vamos primeiro encontrar os intervalos nos quais a função f é crescente ou decrescente. Note que f define uma parábola e, para encontrar tais intervalos, basta encontrar o vértice dessa parábola.

Observe que podemos escrever a equação que define f da seguinte forma:

$$f(x) = -(x-1)^2 - 2.$$

Como $(x-1)^2 \geq 0$, temos que $f(x) \leq f(1) = -2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, o vértice dessa parábola encontra-se no ponto $(1,-2)$ e, portanto, a função é crescente no intervalo $(0,1]$ e decrescente no intervalo $[1,2)$. Ainda, pela simetria da parábola, temos que $f((0,2)) = f((0,1]) = f([1,2))$. Uma vez que f é crescente em $(0,1]$, segue que a imagem $f((0,1])$ deve ser o intervalo formado pelos extremos $f(0)$ e $f(1)$, aberto na extremidade $f(0)$ e fechado na extremidade $f(1)$. Como $f(0) = -3$ e $f(1) = -2$, segue que $f((0,2)) = (-3,-2]$.

2.

(a) Os pontos procurados são todos aqueles no intervalo $[3,8]$. Observe que a função f é crescente, contínua e $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Portanto, $f([x,y]) = [f(x),f(y)]$ e, assim, basta encontrar os valores $x,y \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = 27$ e $f(y) = 512$. Como $x^3 = 27 \iff x = 3$ e $y^3 = 512 \iff y = 8$, segue que os pontos no domínio da função f para os quais $f(x) \in [27,512]$ são todos aqueles no intervalo $[3,8]$.

$f(x) = x^3$, $I = [27,512]$.

(b) Os pontos procurados são todos aqueles no intervalo

$$\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Primeiro, observe que $f(x) > 0$ se, e somente se, $x > 0$. Portanto, se $f(x) \in [2,3]$, então $x > 0$. Assim, podemos nos restringir a analisar f dentro do domínio $(0,+\infty)$.

Agora, afirmamos que f é função decrescente no intervalo $(0,1]$ e crescente no intervalo $[1,\infty)$. De fato, sejam $x < y$ números reais positivos. Então, $f(x) < f(y) \iff 1 < xy$, o que prova nossa afirmação, já que $xy < 1$ se $x,y \in (0,1]$ e $xy > 1$ se $x,y \in [1,+\infty)$.

Uma vez que f é decrescente em $(0,1]$ e crescente em $[1,\infty)$, temos a seguinte propriedade:

$$f([x,y]) = \begin{cases} [f(y),f(x)], & \text{se } x,y \in (0,1]; \\ [f(x),f(y)], & \text{se } x,y \in [1,+\infty). \end{cases}$$

E, como $[2,3] \subseteq f((0,1]) = f([1,+\infty))$, o problema se resume a encontrar os valores $x,y \in (0,1]$ tais que $f(x) = 3$ e $f(y) = 2$, e $x,y \in [1,+\infty)$ tais que $f(x) = 2$ e $f(y) = 3$.

(1) $f(x) = 2 \iff x = 1$.

De fato,

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} = 2 &\iff \\ x^2 - 2x + 1 = 0 &\iff \\ x = 1. \end{aligned}$$

(2) $f(x) = 3 \iff x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

De fato,

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} = 3 &\iff \\ x^2 - 3x + 1 = 0 &\iff \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}&. \end{aligned}$$

Assim, segue que o intervalo procurado é igual a

$$\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right] \cup \left[1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right] = \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right].$$

3.

(a) f é sobrejetora.

Observe que $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$. Logo, $f(x) \geq -5/4$ para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo o ponto $(-1/2, -5/4)$ o vértice da parábola. Disso, concluímos que f é sobrejetora, pois $f(\mathbb{R}) = [-5/4, +\infty)$. Além disso, como f é uma função quadrática e seu domínio é $\mathbb{R}$, f não pode ser injetora.

(b) f não é bijetora, sobrejetora nem injetora.

Seja $y \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} = y &\iff \\ x^2 - yx + 1 = 0 & \end{aligned}$$

A última equação possui soluções reais se, e somente se, $y^2 \geq 4$, isto é, $|y| \geq 2$. Portanto, $f(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ e f não é sobrejetora. Além disso, f também não é injetora já que, pela equação acima, $f(x) = y \iff x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$, para todo $|y| \geq 2$.

(c) f é bijetora.

Por um lado, observe que, se $y \geq x \geq 0$ e $x^2 = y^2$, então $x = y$. Disso, segue que f é injetora. Por outro lado, para todo $y \geq 0$, existe x tal que $f(x) = y$. Disso, segue que f é também sobrejetora. Portanto, segue que f é uma função é bijetora.

(d) f é injetiva.

Note que se $x < y$, então $f(x) = 2^x < 2^y = f(y)$. Disso, segue que f é injetiva. A função f não é sobrejetiva porque $f(x) \geq 0$ para todo $\mathbb{R}$.

4. O retângulo de menor perímetro é o quadrado de lado $\sqrt{A}$; e não existe retângulo de área A com maior perímetro.

Considere um retângulo de lados x e y e área A. Então, $xy = A$, o que implica que o seu perímetro é igual a $2(x + y) = 2\left(x + \frac{A}{x}\right)$. Agora, o problema se resume a encontrar o valor $x > 0$ para o qual a expressão $x + \frac{A}{x}$ assume o seu menor valor. Seja $p \geq 0$. Temos

$$\begin{aligned} x + \frac{A}{x} = 2p &\iff \\ x^2 - 2px + A = 0 &\iff \\ (x-p)^2 + A - p^2 = 0 & \end{aligned}$$

Como $(x-p)^2 \geq 0$, a equação acima possui solução se, e somente se, $p^2 \geq A$. Disso, segue que

$$x + \frac{A}{x} \geq 2\sqrt{A},$$

com igualdade se, e somente se, $x = \sqrt{A}$. Portanto, segue que o perímetro de todo retângulo de área A é pelo menos igual a $4\sqrt{A}$. E, dentre esses retângulos, o de menor perímetro é o quadrado de lado $\sqrt{A}$.

Para responder a segunda parte da questão, observe que, para todo $x > 0$, o retângulo de lados x e A/x tem área A e perímetro $2(x + A/x)$. Dessa forma, o perímetro pode ser arbitrariamente grande se x for grande o suficiente. Logo, não existe um retângulo de área A com maior perímetro.

5. Os valores que minimizam a expressão são $x = \sqrt{bc/a}$ e $y = \sqrt{ac/b}$.

Observe que $xy = c \iff y = cx$ e então a expressão $ax + by$ é igual a

$$ax + \frac{bc}{x} = a\left(x + \frac{bc/a}{x}\right)$$

Agora, a expressão $x + \frac{bc/a}{x}$ é exatamente igual ao semiperímetro de um retângulo de lados x e $bc/(ax)$. Pela questão anterior, segue que essa expressão é minimizada quando $x = \sqrt{bc/a}$ e, consequentemente, $y = \sqrt{ac/b}$. Portanto,

$$\begin{aligned} ax + by &= a\left(x + \frac{bc/a}{x}\right) \\ &\geq a \cdot 2\sqrt{bc/a} \\ &\geq 2\sqrt{abc}, \end{aligned}$$

com a igualdade valendo se, e somente se, $x = \sqrt{bc/a}$ e $y = \sqrt{ac/b}$.

6. Os valores são 0 e $25/8$.

Primeiro, note que, se $a = 0$, então a equação $ax^2 - 5x + 2 = 0$ apresenta uma única solução, que é dada por $x = 2/5$. Agora, suponha que $a \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned} ax^2 - 5x + 2 &= a\left(x - \frac{5x}{a}\right) + 2 \\ &= a\left(x - \frac{5}{2a}\right)^2 - \frac{25}{4a} + 2 \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} ax^2 - 5x + 2 = 0 &\iff \\ a\left(x - \frac{5}{2a}\right)^2 = \frac{25}{4a} - 2 & \end{aligned}$$

A última equação apresenta apenas uma solução se, e somente se $25/(4a) - 2 = 0 \iff a = 25/8$.

7. Observe que f não é linear, pois há pontos que pertencem à reta de equação $y_1(x) = 2x$ e outros que pertencem à reta de equação $y_2(x) = 3x$.

Afirmamos que x é racional se, e somente se, nx é racional para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. De fato, se x é racional, então um inteiro vezes um número racional continua sendo racional. Reciprocamente, se nx é racional, então $\frac{1}{n} \cdot (nx) = x$ é racional também. Logo, para todo x racional, segue que $f(x) = 2x$ e $f(nx) = 2nx = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Para todo x irracional, segue que $f(x) = 3x$ e $f(nx) = 3nx = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, como queríamos.

8. Note que, se $a \neq 0$, então

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Logo, x é racional se, e somente se $b^2 - 4ac = d^2$, para algum d racional não-negativo. Mais precisamente, como $a, b, c \in \mathbb{Z}$, então devemos ter $d^2 \in \mathbb{Z}$. Logo, x é racional se, e somente se, existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $b^2 - 4ac = d^2$. Além disso, d deve ser ímpar, já que a expressão $b^2 - 4ac$ é ímpar para todo b ímpar. A seguir, verificaremos que não existe tal d.

Por um lado, note que a maior potência de 2 que divide $4ac$ é 4. Por outro lado, 8 divide a diferença $d^2 - b^2$. Isso pode ser verificado à mão: todo inteiro ímpar é pode ser escrito como $4a + 1$ ou $4a + 3$, para algum inteiro a. Para cada uma dessas possibilidades, podemos verificar que 8 é sempre um divisor de $d^2 - b^2$. Portanto, segue que não pode existir d tal que $b^2 - d^2 = 4ac$, já que 8 deve dividir $b^2 - d^2$, mas não divide $4ac$.

9. Sem perda de generalidade, suponha que $x_3 < x_2 < x_1$. Basta provarmos que existem únicos $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, tais que

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c &= y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c &= y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c &= y_3. \end{aligned}$$

Isso é o mesmo que encontrar $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

A solução é única se, e somente se, a matrix 3×3 acima é invertível. Isto é, o seu determinante é diferente de 0. Veja que o determinante dessa matriz é dado pela expressão

$$x_1^2(x_2 - x_3) + x_2^2(x_3 - x_1) + x_3^2(x_1 - x_2),$$

que é equivalente a

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3).$$

Como cada um dos fatores acima é positivo, a expressão acima é sempre maior do que 0. Assim, a matriz acima é sempre invertível. Ainda, veja que, $a = 0$ se, e somente se, os pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) são colineares. Nesse caso, b e c seriam os coeficientes da reta $y(x) = bx + c$ que conteria esses pontos.