# Módulo de Razões e Proporções

# Proporção e Conceitos Relacionados

## $7^{\circ}$ ano E.F.

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

Portal da Matemática
OBMEP

# 1 Exercícios Introdutórios

**Exercício 1.** Dados os números reais $a$, $b$, $c$ e $d$. Dizemos que eles são diretamente proporcionais se

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ com } b \text{ e } d \text{ não nulos}$$

e lê-se $a$ está para $b$ assim como $c$ está para $d$. Verifique se os números abaixo, na ordem dada, são diretamente proporcionais.

a) $(2, 4, 3, 6)$.

b) $(2, 15, 3, 60)$.

c) $(4, 20, 15, 75)$.

**Exercício 2.** Dados os números reais $a$, $b$, $c$ e $d$. Dizemos que eles são inversamente proporcionais se

$$\frac{a}{\frac{1}{b}} = \frac{c}{\frac{1}{d}}, \text{ ou seja, se } ab = cd, \text{ com } b \text{ e } d \text{ não nulos.}$$

Verifique se os números abaixo, na ordem dada, são inversamente proporcionais.

a) $(8, 5, 1, 40)$.

b) $(15, 2, 3, 10)$.

c) $(1, 20, 2, 40)$.

**Exercício 3.** Prove que se $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ e $b + d \neq 0$, então $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$.

**Exercício 4.** Dividir um valor $n$ em partes $a$ e $b$ diretamente proporcionais a $x$ e $y$ é o mesmo que resolver o sistema

$$\begin{cases} a + b = n \\ \dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{a+b}{x+y} = \dfrac{n}{x+y} \end{cases}$$

a) Divida o número 400 em partes diretamente proporcionais aos números 3, 7.

b) Divida o número 180 em partes diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 4.

**Exercício 5.** Dividir um valor $n$ em partes $a$ e $b$ inversamente proporcionais a $x$ e $y$ é mesmo que resolver o sistema

$$\begin{cases} a + b = n \\ \dfrac{a}{\frac{1}{x}} = \dfrac{b}{\frac{1}{y}} = \dfrac{a+b}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \dfrac{n}{\frac{x+y}{xy}} \end{cases}$$

a) Divida o número 120 em partes inversamente proporcionais a 2 e 4.

b) Divida o número 72 em parcelas inversamente proporcionais a 3, 4 e 6.

# 2 Exercícios de Fixação

**Exercício 6.** Em uma padaria, 10 litros de uma mistura de café com leite, em quantidades iguais, é vendida no café da manhã. Para obter um teor de $\dfrac{4}{5}$ de café e $\dfrac{1}{5}$ de leite, quantos litros de cada um desses dois líquidos deve-se acrescentar aos 10 litros da mistura?

**Exercício 7.** Duas velas homogêneas e de comprimentos iguais são acesas simultaneamente. A primeira tem um tempo de queima de 4 horas e a segunda de 6 horas. Após certo tempo, ambas foram apagadas ao mesmo tempo. Observou-se que o resto de uma tinha o dobro do resto da outra. Por quanto tempo ficaram acesas ?

**Exercício 8.** Uma empresa de impressões digitais tem uma copiadora $A$ que imprime 500 páginas em oito minutos. O dono da empresa decide comprar outra máquina copiadora $B$ mais moderna e observa que as duas máquinas trabalhando juntas imprimem 500 páginas em dois minutos. Em quanto tempo a máquina $B$ imprime 500 páginas?

**Exercício 9.** Se um pacote de biscoito contém 10 biscoitos e pesa 95 gramas, e se 15 gramas de biscoito correspondem a 90 calorias, quantas calorias tem cada biscoito?

**Exercício 10.** A distância entre as cidades mineiras de Belo Horizonte e Montes Claros, em um mapa representado em escala $1 : 7000000$, é de $6,5$ cm. Qual a distância real entre essas duas cidades?

**Exercício 11.** Uma composição ferroviária usada para o transporte de mercadorias faz o percurso entre duas cidades, distantes 72 km uma da outra, em um intervalo de tempo de 2 h. A locomotiva, que mede 20 m de comprimento, puxa um comboio formado por $N$ vagões de 15 m de comprimento cada um. Sabe-se que no meio do caminho entre as duas cidades existe uma ponte de 490 m de comprimento e que a composição leva 1 min para atravessá-la completamente. Nesse sentido, qual o número $N$ de vagões que formam a composição?

**Exercício 12.** Um automóvel pode andar, sem abastecimento e mantendo consumo constante, durante 360 minutos. Tendo saído com um furo no tanque de combustível, que escoa combustível numa vazão constante, ele andou apenas 144 minutos. Qual a fração da quantidade de combustível que escoaria caso ficasse 15 minutos parado?

**Exercício 13.** Uma pessoa com 80 kg de massa corporal iniciou um tratamento médico para redução dessa massa e, no $15^{\circ}$ dia do tratamento, já havia reduzido 3 kg. Supondo que a redução diária de massa seja sempre a mesma, qual o número de dias necessários, a partir do início do tratamento, para que essa pessoa atinja 65 kg?

**Exercício 14.** Gabriela e Jonas moram na mesma casa e estudam na mesma escola. Jonas vai de casa à escola em 30 minutos e Gabriela em 40 minutos. Se Gabriela saiu de casa 5 minutos mais cedo, quantos minutos Jonas levará para alcançá-la, considerando que as velocidades de ambos são constantes?

## 3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

**Exercício 15.** Dois recipientes, $R_1$ e $R_2$, contêm a mesma quantidade de misturas de álcool e água, nas respectivas proporções: $3:5$, em $R_1$ e $2:3$ em $R_2$. Juntando-se em um terceiro recipiente os conteúdos de $R_1$ e $R_2$, qual a proporção de álcool e água nesta mistura?

**Exercício 16.** Sueli colocou 40 mL de café em uma xícara vazia de 80 mL, e 40 mL de leite em outra xícara vazia de mesmo tamanho. Em seguida, Sueli transferiu metade do conteúdo da primeira xícara para a segunda e, depois de misturar bem, transferiu metade do novo conteúdo da segunda xícara de volta para a primeira. Do conteúdo final da primeira xícara, a fração correspondente ao leite é

**Exercício 17.** Na cidade, um automóvel consome 1 litro de gasolina a cada 10 km percorridos. Já na estrada, o mesmo veículo consome 1 litro de gasolina a cada 18 km percorridos. Uma pessoa pretende utilizar esse carro para fazer uma viagem em que 25% do percurso será na cidade e o restante será na estrada. Nessa viagem, qual será a distância média percorrida com um 1 litro de gasolina?

**Exercício 18.** O reservatório de água de uma certa cidade está com o nível abaixo do recomendado, tendo disponível apenas 125000 L. Dessa forma, a água que ainda resta deve passar por um tratamento químico mais intensivo para que possa ser consumida. Para isso, deve ser misturado cloro numa razão de 3 g para 12 litros de água. Qual a quantidade de cloro necessária para tratar toda água disponível no reservatório?

**Exercício 19.** Em uma corrida de táxi, é cobrado um valor inicial fixo, chamado de bandeirada, mais uma quantia proporcional aos quilômetros percorridos. Se por uma corrida de 8 km paga-se R\$ $28,50$ e por uma corrida de 5 km paga-se R\$ $19,50$, então qual o valor da bandeirada?

**Respostas e Soluções.**

**1.** Seguindo o enunciado, precisamos checar se

a) $\dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6}$, ou sejar, $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ o que é verdadeiro. Assim, os números dados são diretamente proporcionais.

b) $\dfrac{2}{15} = \dfrac{3}{60}$, ou seja, $2 \cdot 60 = 3 \cdot 15$. Como a igualdade é falsa, os números dados NÃO são proporcionais.

c) $\dfrac{4}{20} = \dfrac{15}{75}$, ou seja, $4 \cdot 75 = 15 \cdot 20$ o que é verdadeiro. Assim, os números dados são diretamente proporcionais.

**2.** Seguindo o enunciado, precisamos checar se:

a) $\dfrac{8}{\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{\frac{1}{40}}$, ou seja, $8 \cdot 5 = 1 \cdot 40$ o que é verdadeiro. Assim, os números dados são inversamente proporcionais.

b) $\dfrac{15}{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{\frac{1}{10}}$, ou seja, $15 \cdot 2 = 3 \cdot 10$ o que é verdadeiro. Assim, os números dados são inversamente proporcionais.

c) $\dfrac{1}{\frac{1}{20}} = \dfrac{2}{\frac{1}{40}}$, ou seja, $1 \cdot 20 \neq 2 \cdot 40$. Como a igualdade anterior é falsa, os números dados NÃO são proporcionais.

**3. Demonstração:** Podemos escrever $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$ para algum $k$ real. Daí, temos $a = bk$, $c = dk$ e

$$a + c = bk + dk = k(b+d) \text{ e } \frac{a+c}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k.$$

$\blacksquare$

**4.** Devemos aplicar o exposto no enunciado:

a) Sendo as partes iguais a $a$ e $b$, podemos escrever

$$\begin{cases} a + b = 200 \\ \dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{7} = \dfrac{a+b}{3+7} = \dfrac{400}{10} = 40 \end{cases}$$

Assim, $\dfrac{a}{3} = 40$ com $a = 120$ e $\dfrac{b}{7} = 40$ com $b = 280$.

b) Sendo as partes iguais a $a$, $b$ e $c$, podemos escrever

$$\begin{cases} a + b + c = 180 \\ \dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{3} = \dfrac{c}{4} = \dfrac{a+b+c}{2+3+4} = \dfrac{180}{9} = 20 \end{cases}$$

Assim, $\dfrac{a}{2} = 20$ com $a = 40$, $\dfrac{b}{3} = 20$ com $b = 60$ e $\dfrac{c}{4} = 20$ com $c = 80$.

**5.** Devemos aplicar o exposto no enunciado.

a) Sendo as partes iguais a $a$ e $b$, podemos escrever

$$\begin{cases} a + b = 120 \\ \dfrac{a}{\frac{1}{2}} = \dfrac{b}{\frac{1}{4}} = \dfrac{120}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \dfrac{120 \cdot 4}{3} = 160 \end{cases}$$

Assim, $2a = 160$ e $a = 80$ e $4b = 160$ com $b = 40$.

b) Sendo as partes iguais a $a$, $b$ e $c$, podemos escrever

$$\begin{cases} a + b + c = 72 \\ \dfrac{a}{\frac{1}{3}} = \dfrac{b}{\frac{1}{4}} = \dfrac{c}{\frac{1}{6}} = \dfrac{120}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = \dfrac{120 \cdot 12}{9} = 160 \end{cases}$$

Assim, $a = \dfrac{160}{3}$, $b = 40$ e $c = \dfrac{80}{3}$.

**6.** (Adaptado do vestibular da UNIFOR (CE) $-$ 2014)
Temos que na mistura inicial há 5 litros de café e 5 litros de leite. Como queremos mais café do que leite, devemos acrescentar mais café. Para encontrar a quantidade, basta fazer

$$\begin{aligned} \frac{5+x}{10+x} &= \frac{4}{5} \\ 25 + 5x &= 40 + 4x \\ x &= 15 \text{ litros de café.} \end{aligned}$$

**7.** (Adaptado do vestibular da UNIFOR (CE) $-$ 2014)
Suponhamos, sem perda de generalidade, que o tamanho das velas seja igual a 12 cm. A proporção de queima da primeira vela é de $\dfrac{12}{4} = 3$ cm/h e a segunda é $\dfrac{12}{6} = 2$ cm/h. Depois de $t$ horas a primeira mede $12 - 3t$ e a segunda $12 - 4t$. Queremos o tempo tal que $2(12 - 3t) = 12 - 2t$, isso gera $4t = 12$ e $t = 3$ horas.

**8.** (Extraído do vestibular da UEG (GO) $-$ 2014)
Em um minuto a primeira máquina faz a proporção de $\dfrac{1}{8}$ do trabalho, a segunda faz $\dfrac{1}{t}$ e as duas juntas fazem $\dfrac{1}{2}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} + \frac{1}{t} &= \frac{1}{2} \\ \frac{t+8}{8t} &= \frac{4t}{8t} \\ 3t &= 8 \\ t &= 2 \text{ minutos e 40 segundos.} \end{aligned}$$

**9.** (Extraído do vestibular da UECE (CE) $-$ 2015)
Temos, em média, $\dfrac{90}{15} = 6$ calorias por grama. Além disso, no geral, cada biscoito tem $\dfrac{95}{10} = 9{,}5$ gramas. Assim, cada um deles possui $9{,}5 \cdot 6 = 57$ calorias.

**10.** (Adaptado do vestibular da UEL (PR) $-$ 2015)
Temos a proporção de 1 cm no mapa para $7000000$ cm $=$ $70000$ m $= 70$ km na realidade. Assim, a distância pedida é igual a $6{,}5 \cdot 70 = 455$ km.

**11.** (Adaptado do vestibular da UEPA (PA) $-$ 2015)
A velocidade média da composição é de $\dfrac{72}{2} = 36$ km/h, o que equivale a $\dfrac{36000}{60} = 600$ metros por minuto. O comprimento total da composição (locomotiva mais $N$ vações de 15 metros) é $20 + 15N$. Para entrar e sair da ponte a distância total percorrida foi de $490 + 20 + 15N = 510 + 15N$ e no tempo de um minuto, ele percorre 600 metros. Assim, podemos escrever que $510 + 15N = 600$ e $N = 6$ vagões.

**12.** (Adaptado do vestibular da UNIFOR (CE) − 2015)
Em um minuto ele consumiu $\dfrac{1}{360}$ do total, o furo reduziu $\dfrac{1}{t}$ e juntos fizeram $\dfrac{1}{144}$, ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{1}{360}+\frac{1}{t}&=\frac{1}{144}\\ \frac{1}{t}&=\frac{1}{144}-\frac{1}{360}\\ \frac{1}{t}&=\frac{5-2}{720}\\ \frac{1}{t}&=\frac{1}{240}\\ t&=240.\end{aligned}$$

Assim, o tanque ficará vazio em 240 minutos com carro parado. Portanto, em 15 minutos houve o gasto de $\dfrac{15}{240}=\dfrac{1}{16}$ da quantidade de combustível no tanque.

**13.** (Adaptado do vestibular da FCI (SP) − 2015)
Queremos o prazo para a perda de 15 quilos. Por dia a massa está variando, em média, numa proporção de $\dfrac{3}{15}=0,2$ kg/dia, após 5 dias ela perda 1 quilo. Assim, o prazo pedido é de $5\cdot 15=75$ dias.

**14.** (Extraído do vestibular da UNIFOR (CE) − 2015)
Suponha, sem perda de generalidade, que a distância da casa deles até a escola seja 1200 metros. Assim, Jonas anda a $\dfrac{1200}{30}=40$ metros por minuto e Gabriela a $\dfrac{1200}{40}=30$. Saindo 5 minutos antes, uma equação para o movimento de Gabriela será $150+30t$ e a de Jonas é $40t$. Assim, eles se encontrarão depois de $40t=150+30t$, ou seja, $t=15$ minutos.

**15.** (Adaptado do vestibular da PUC (SP) − 2014)
Sejam $x_i$ e $y_i$ as quantidades de álcool e água no recipiente $i$, com $i\in\{1,2\}$, cada um com capacidade $n$. Assim, podemos escrever

$$\begin{cases}x_1+y_1=n\\ \dfrac{x_1}{3}=\dfrac{y_1}{5}=k_1,\text{ com } k_1\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Assim, $x_1=3k_1$ e $y_1=5k_1$ fazendo $n=8k_1$ ou $k_1=\dfrac{n}{8}$.

$$\begin{cases}x_2+y_2=n\\ \dfrac{x_2}{2}=\dfrac{y_2}{3}=k_2,\text{ com } k_2\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Assim, $x_2=2k_2$ e $y_2=3k_1$ fazendo $n=5k_2$ ou $k_2=\dfrac{n}{5}$.

Por fim, a razão fica

$$\begin{aligned}\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}&=\frac{3k_1+2k_2}{5k_1+3k_2}=\\ &=\frac{3\cdot\frac{n}{8}+2\cdot\frac{n}{5}}{5\cdot\frac{n}{8}+3\cdot\frac{n}{5}}\\ &=\frac{\frac{15n+16n}{40}}{\frac{25n+24n}{40}}=\frac{31}{49}.\end{aligned}$$

**16.** (Adaptado do vestibular da FGV (SP) − 2015)
Vamos acompanhar todas as trocas. Primeiro, foram 20 ml de café para a segunda xícara, na qual agora temos 60 ml, $\dfrac{1}{3}$ de café e $\dfrac{2}{3}$ de leite. Assim, dos 30 ml da segunda transferência, 10 ml foram de café e 20 ml de leite. A primeira ficou com 50 ml, sendo $\dfrac{2}{5}$ de leite.

**17.** (Adaptado do vestibular do IBMEC (SP) − 2015)
Basta fazermos a proporção $0,25\cdot 10+0,75\cdot 18=15$ quilômetros.

**18.** (Adaptado do vestibular do IFSC (SP) − 2015)
A mistura fica com concentração de $\dfrac{3}{12}=0,25$ gramas de cloro por litro. Por fim, basta fazermos

$$125000\cdot 0,25=31250\text{ gramas}=31,25\text{ kg.}$$

**19.** (Adaptado do vestibular da UECE (CE) − 2014)
Sejam $b$ e $x$ os valores da bandeira e do quilômetro rodado. Assim, podemos escrever

$$\begin{cases}8x+b=28,50\\ 5x+b=19,50\end{cases}$$

Ao subtraí-las, teremos $3x=9$ e $x=3$. Por fim, basta substituirmos em alguma das equações do sistema para encontramos $b=4,50$. Assim, o valor da bandeirada é R\$ $4,50$.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com