Módulo de Sistemas de Numeração e Paridade

Divisibilidade em Diferentes Bases de Numeração

Tópicos Adicionais

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

Portal da Matemática
OBMEP

Sistemas de Numeração e Paridade
Divisibilidade em Diferentes Bases de Numeração

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Um número $X = a_1a_2a_3 \ldots a_n$ na base 10, no qual todos os $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, é divisível por 2 se a_n for par. Para provar esse fato, basta perceber que a fração $\dfrac{X}{2}$ é inteira se

$$\begin{aligned}\frac{X}{2} &= \frac{a_1 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-1} + a_3 \cdot 10^{n-3} + \ldots + a_n \cdot 10^0}{2} \\ &= \frac{a_1 \cdot 10^n}{2} + \frac{a_2 \cdot 10^{n-1}}{2} + \frac{a_3 \cdot 10^{n-3}}{2} + \ldots + \frac{a_n}{2}\end{aligned}$$

também o for. Agora, perceba que todas as parcelas, exceto a última têm alguma potência de 10 e, consequentemente, elas já são divisíveis por 2. Portanto, a fração $X/2$ é um inteiro se $\dfrac{a_n}{2} \in \mathbb{N}$, ou seja, quando a_n é par. Analisando a demonstração anterior, enuncie e demonstre as regras de divisibilidade por 5, 4 e 8 na base 10.

Exercício 2. O Binômio de Newton é uma ferramenta importante para demonstrar algumas relações de divisibilidade. A expansão de $(x + y)^n$ é:

$$\binom{n}{n}x^ny^0 + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{n-2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{0}x^0y^n,$$

na qual $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$. Uma aplicação interessante é a demonstração da regra de divisibilidade por 9 (para números na base decimal). Usando $x = 9$ e $y = 1$, podemos proceder da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}X &= a_1a_2a_3 \ldots a_n \\ &= a_1 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n \\ &= a_1 \cdot (9+1)^n \\ &+ a_2 \cdot (9+1)^{n-1} \\ &+ a_3 \cdot (9+1)^{n-2} \\ &\vdots \\ &+ a_{n-1} \cdot (9+1) \\ &+ a_n.\end{aligned}$$

Agora, na expansão de todos os binômios anteriores, temos parcelas com potências de 9, com exceção da última parcela em cada desenvolvimento que será apenas o dígito correspondente. Assim, para concluir que um número é divisível por 9, basta somarmos os seus algarismos e, caso essa soma seja um múltiplo de 9, então o valor inicial também o será. Utilize algum raciocínio análogo para concluir as regras de divisibilidade por 3 e 11.

Exercício 3. Calcule o número natural que, ao ser dividido por 7, resulta no quociente 4 e o resto é o maior possível.

Exercício 4. Os habitantes do planeta *Duodex* têm 12 dedos. Para eles, é mais conveniente trabalhar com o sistema duodecimal (base doze). Os algarismos desse sistema são

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B\},$$

sendo $A = 10$ e $B = 11$ no sistema decimal, por exemplo,

$$\begin{aligned}(1A0B)_{12} &= 1 \cdot 12^3 + A \cdot 12^2 + 0 \cdot 12^1 + B \cdot 12^0 \\ &= 1728 + 10 \cdot 144 + 11 \\ &= 3179.\end{aligned}$$

a) Converta o número $(AB)_{12}$ para a base 10.

b) Qual o critério de divisibilidade por 2 na base 12.

c) As cédulas de Duodindin (moeda corrente de Duodex), são compostas exatamente por todos os divisores de 12. Quais são elas e como estabelecer o critério de divisibilidade de cada um dos divisores encontrados?

Exercício 5. Prove que o critério de divisibilidade por $n + 1$ na base n será efetuado como a soma dos algarismos das ordens pares subtraído da soma dos algarismos nas ordens ímpares.

Exercício 6. Mostre que $10x + y$ é divisível por 7 se e só se $x - 2y$ também for.

Exercício 7. Imagine que você viajou para um planeta onde os habitantes usam o sistema de numeração posicional de base 5. Construa tabuadas nesse sistema para a adição e para multiplicação. Realize as seguintes contas, sem converter os números para o sistema decimal, como se você tivesse que explicá-las para seus alunos nesse planeta.

a) $(1234321)_5 + (2030104)_5$

b) $(4434201)_5 - (434421)_5$

c) $(1234)_5 \times (3002)_5$

Exercício 8. Sejam a e $b \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Determine os valores possíveis de $(a - b)^2$ para que $23a1992b$ seja divisível por 45.

Exercício 9. O número $(34x1)_5$ é divisível por $(31)_{10}$. Qual o valor de x?

Exercício 10. Calcule quantos números naturais de 5 algarismos distintos existem no sistema de base 8.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 11. Calcule os números naturais que quando divididos por 8 deixam resto igual ao dobro do quociente.

Exercício 12. O número A corresponde à escrita de 450 na base 6.

a) Qual o valor de A?

b) Determine se 6 divide A.

Exercício 13. Mostre que $10x + y$ é divisível por 13 se e só se $x + 4y$ também for.

Exercício 14. Qual o menor inteiro positivo que dividido por 9 tem resto 3 e dividido por 11 tem resto 4?

Exercício 15. Se x representa um dígito na base 10 e

$$\overline{x11} + \overline{11x} + \overline{1x1} = 777,$$

qual o valor de x?

Exercício 16. Um número inteiro positivo k deixa resto 4 quando dividido por 7.

a) Determine o resto da divisão de $k^2 + k + 1$ por 7.

b) Qual é o menor múltiplo positivo de k que devemos somar a k^2 para obter um múltiplo de 7.

Exercício 17. Distribua 127 moedas de um real entre 7 porta-moedas de modo que qualquer soma inteira de 1 até 127 reais possa ser paga sem abrir os porta-moedas.

Exercício 18. Quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem no sistema de base 7?

Exercício 19. Escreva a fração decimal $\dfrac{13}{16}$ no sistema de base 6.

Exercício 20. Um número foi obtido permutando-se os algarismos de outro número.
i) A soma desses dois números pode ser igual a 9999?
ii) Pode ser igual a 99999?

Exercício 21. Um número com três dígitos na base 7 tem seus dígitos no sentido opostos quando escrito na base 9. Qual a representação decimal desse número?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 22. Para cada inteiro $n \geq 4$, seja $a_n = 0.\overline{133}_n$, n uma base numérica. O produto $a_4 \cdot a_5 \cdot \ldots \cdot a_{99}$ resulta em $\dfrac{m}{n!}$, onde m e n são inteiros positivos e n é o menor possível. Qual o valor de m ?

Exercício 23. Arnaldo e Bernaldo estão brincando no quadro da sala de aula da seguinte maneira: eles escrevem inicialmente no quadro um número inteiro positivo n. Então, alternadamente, começando com Arnaldo, apagam o número que está no quadro e escrevem um novo número que pode ser:

- o que acabou de ser apagado menos a maior potência de 2 (com expoente inteiro não-negativo) menor do que ou igual ao número apagado;
- o que acabou de ser apagado dividido por 2, caso o número apagado seja par.

Vence a brincadeira quem obtiver primeiro o número zero.

a) Determine qual dos jogadores possui uma estratégia vencedora para $n = 40$ e descreva-a.

b) Determine qual dos jogadores possui uma estratégia vencedora para $n = 2012$ e descreva-a.

Exercício 24. Seja $n \geqslant 1$ um inteiro. Temos n lâmpadas alinhadas e numeradas, da esquerda para a direita, de 1 a n. Cada lâmpada pode estar acesa ou apagada. A cada segundo, determina-se a lâmpada apagada de maior número e inverte-se o estado desta (de acesa para apagada ou de apagada para acesa) e das lâmpadas posteriores (as lâmpadas de maior número), o processo se encerra se todas ficarem acesas.

a) Mostre que em algum momento todas as lâmpadas estarão acesas.

b) Suponha que inicialmente todas as lâmpadas estejam apagadas. Determine depois de quantos segundos todas as lâmpadas estarão acesas.

c) Suponha agora $n = 11$ e que no início somente as lâmpadas de números 6, 7 e 10 estejam acesas. Mostre que após exatamente 1997 segundos todas as lâmpadas estarão acesas.

Exercício 25. Seja N um inteiro tal que na base b vale $(777)_b$. Qual o menor inteiro positivo b tal que N é uma quarta potência?

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1.

i) Um número $X = a_1a_2a_3\dots a_n$ na base 10 é divisível por 5 se $a_n \in \{0,5\}$. Para provar esse fato, basta perceber que a fração $\dfrac{X}{5}$ é inteiro se

$$\begin{aligned}\frac{X}{5} &= \frac{a_1\cdot 10^n + a_2\cdot 10^{n-1} + a_3\cdot 10^{n-3} + \ldots + a_n\cdot 10^0}{5}\\ &= \frac{a_1\cdot 10^n}{5} + \frac{a_2\cdot 10^{n-1}}{5} + \frac{a_3\cdot 10^{n-3}}{5} + \ldots + \frac{a_n}{5}\end{aligned}$$

também o for. Agora, perceba que todas as parcelas, exceto a última, têm alguma potência de 10 e, consequentemente, são divisíveis por 5. A fração $X/5$ é inteira se $\dfrac{a_n}{5} \in \mathbb{N}$, ou seja, quando $a_n \in \{0,5\}$.

ii) Um número $X = a_1a_2a_3\dots a_n$ na base 10 é divisível por 4 se $\overline{a_{n-1}a_n}$ também o for. Para provar esse fato, basta perceber que a fração $\dfrac{X}{4}$ é inteira se

$$\begin{aligned}\frac{X}{4} &= \frac{a_1\cdot 10^n + a_2\cdot 10^{n-1} + a_3\cdot 10^{n-3} + \ldots + a_n\cdot 10^0}{4}\\ &= \frac{a_1\cdot 10^n}{4} + \frac{a_2\cdot 10^{n-1}}{4} + \ldots + \frac{a_{n-1}\cdot 10^1}{4} + \frac{a_n}{4}\end{aligned}$$

também o for. Agora, observe que apenas as duas últimas parcelas têm potências de 10 menores que 100, então todas as demais são divisíveis 4 (toda potência de 10 maior do que ou igual a 100 é divisível por 4). A fração $X/4$ é inteira se

$$\frac{a_{n-1}\cdot 10^1}{4} + \frac{a_n}{4} = \frac{a_{n-1}\cdot 10^1 + a_n}{4} \in \mathbb{N}.$$

Isso acontece quando $\overline{a_{n-1}a_n}$ é divisível por 4.

iii) Análogo ao anterior, só observando que apenas as três últimas parcelas da escrita de X na base 10 têm potências de 10 menores que 1000 e todas as demais são divisíveis 8 (toda potência de 10 maior do que ou igual a 1000 é divisível por 8). Portanto, a fração $X/8$ é inteira se $\overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n}$ é divisível por 8.

2. No caso da regra de divisibilidade por 3, basta adaptar a regra demonstrada para o 9, pois se toda parcela (exceto a última em cada binômio desenvolvido) é divisível por 9, então também será por 3. Consequentemente, o critério é o mesmo: basta somarmos os algarismos que compõe o número e, se o resultado é divisível por três, o valor original também será. Para o número 11, voltaremos a analisar o binômio, mas agora usando $x = 11$ e $y = -1$. Sendo assim, a expensão de uma potência de 10 genérica será:

$$\begin{aligned}10^k = (11-1)^k = \binom{k}{k}11^k(-1)^0 + \binom{k}{k-1}11^{k-1}(-1)^1 +\\ +\binom{k}{k-2}11^{k-2}(-1)^2 + \ldots + \binom{k}{0}11^0(-1)^k.\end{aligned}$$

É importante destacar que cada parcela terá sinal alternado em relação à anterior, pois todas possuem o termo $(-1)^k$, com $k \in \{0,1,\dots,n\}$. Com exceção da última parcela, de valor $(-1)^n$, todas são divisíveis por 11.

$$\begin{aligned}X &= a_1a_2a_3\dots a_n\\ &= a_1\cdot 10^n + a_2\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\cdot 10 + a_n\\ &= a_1\cdot(11-1)^n\\ &+ a_2\cdot(11-1)^{n-1}\\ &+ a_3\cdot(11-1)^{n-2}\\ &\vdots\\ &+ a_{n-1}\cdot(11-1)\\ &+ a_n.\end{aligned}$$

Por fim, para concluir a regra de divisibilidade por 11 basta destacar que em cada desenvolvimento a última parcela alternará de sinal. Portanto, para descobrir se um número é divisível por 11, basta somarmos os algarismos das ordens pares e o subtrairmos da soma dos algarismos das ordens ímpares. Se o resultado for divisível por onze, o valor inicial também o será, caso contrário, 11 não divide o número inicial.

3. Os possíveis restos numa divisão por 7 são os elementos do conjunto $\{0,1,2,3,4,5,6\}$. O maior resto possível é o 6 e assim queremos descobrir $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{array}{r|l} n & 7 \\ \cline{2-2} 6 & 4 \end{array}$$

A partir do diagrama anterior, $n = 7\cdot 4 + 6 = 34$.

4. Para as conversões, usaremos os princípios básicos, sendo assim:

a) $(AB)_{12} = A\cdot 12^1 + B\cdot 12^0 = 10\cdot 12 + 11 = 131$.

b) Na expansão de todos os números da base doze, com exceção da última parcela, todas possuem alguma potência de 12 maior que 1. Sendo assim, basta vermos se o último dígito da direita é par.

c) O Duodindin tem cédulas de 1, 2, 3, 4, 6 e 12. Utilizando o raciocínio do item anterior, podemos concluir que para todos esses casos, basta observarmos se o algarismo na ordem mais à direita é divisor de doze (exceto o 12, que será quando o número terminar em zero).

5. Análogo ao critério do 11 na base 10, feito no problema 2.

6. Se $10x + y$ é divisível por 7, então $10x + y - 7x - 7y$ também é. Agora, temos que

$$10x + y - 7x - 7y = 3x - 6y.$$

Logo, $3x - 6y$ é divisível por 7. Fatorando o 3, temos

$$3x - 6y = 3 \cdot (x - 2y).$$

Como 7 não divide 3, então 7 divide $x - 2y$. Para provar a volta, basta tomarmos as operações inversas em cada passagem anterior.

Observação: Vejamos agora alguns exemplos da aplicação do que foi demonstrado no exercício 6.

a) Para demonstrar que o número 294 é divisível por 7, basta tomarmos $x = 29$ e $y = 4$:

$$29 - 2 \cdot 4 = 21.$$

Como 7 divide 21, então 7 divide 294.

b) Para verificar se 7 divide o número 248738, o método vai ser aplicado várias vezes, observe.

$$\begin{aligned} 24873 - 2 \cdot 8 &= 24857 \\ 2485 - 2 \cdot 7 &= 2471 \\ 247 - 2 \cdot 1 &= 245 \\ 24 - 2 \cdot 5 &= 14. \end{aligned}$$

Como 7 divide 14, então 7 divide 248738.

c) Usando o método para o número 7557, obtemos:

$$\begin{aligned} 755 - 2 \cdot 7 &= 741 \\ 74 - 2 \cdot 1 &= 72 \\ 7 - 2 \cdot 2 &= 3. \end{aligned}$$

Assim, como 7 **não** divide 3, 7 não divide 7557.

7. (Adaptado do material do PIC)
As tabelas de soma e de multiplicação ficam

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Observando as tabelas construídas, temos as respostas:

a) $(3314430)_5$

b) $(344230)_5$

c) $(4320023)_5$

8. Um número que é divisível por 45 é, ao mesmo tempo, divisível por 5 e por 9. Para ser divisível por 5, deve ter o algarismo das unidades igual a 0 ou 5, esses são os possíveis valores de b. Para ser divisível por 9, a soma dos seus algarismos deve ser um múltiplo de 9, ou seja, 9 deve dividir

$$2 + 3 + a + 1 + 9 + 9 + 2 + b = 26 + a + b.$$

i) Para $b = 0$, temos que $26 + a$ deve ser múltiplo de 9, daí $a = 1$ é a única solução no conjunto indicado.

ii) Para $b = 5$, temos que $31 + a$ deve ser múltiplo de 9, daí $a = 5$ é a única solução no conjunto indicado.

Por fim, para $a = 1$ e $b = 0$, temos $(1 - 0)^2 = 1$ e, para $a = 5$ e $b = 5$, temos $(5 - 5)^2 = 0$. Os possíveis valores de $(a - b)^2$ são 0 e 1.

9. Temos que

$$\begin{aligned}(34x1)_5 &= 3\cdot 5^3 + 4\cdot 5^2 + x\cdot 5^1 + 1\\ &\geq 3\cdot 5^3 + 4\cdot 5^2 + 1 = 476.\end{aligned}$$

O menor múltiplo de 31 maior que 476 é $496 = 31 \cdot 16$. Além disso, temos que $496 = (3441)_5$. Agora, perceba que $31 \cdot 17 = 527$ e

$$\begin{array}{r|l}
527 & 5 \\ \cline{2-2}
525 & 105 \;|\; 5 \\ \cline{1-1}
\color{red}{2} & 105 \quad 21 \;|\; 5 \\
& \color{red}{0} \quad\;\; 20 \quad \color{red}{4} \\
& \qquad\;\; \color{red}{1}
\end{array}$$

$$\longleftarrow$$

$$527 = (4102)_5$$

,

o que indica que a maior ordem nessa sequência já cresceu e o 4 é o único algarismo que pode figurar como o x do enunciado.

10. (Extraído do vestibular do IME)
No sistema de base 8 só há 8 símbolos a serem usados: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. sendo que a maior ordem não pode ser igual a 0 (com exceção do dígito de ordem única, o próprio zero). Assim, temos $6 \times 6 \times 5 = 180$ números com três algarismos distintos.

11. Sabendo que os possíveis restos numa divisão por 8 são $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e como o resto é o dobro do quociente, então só trabalharemos com os valores pares, ficando com os possíveis restos: 0,2,4 e 6. Seja n o valor procurado. Simbolicamente teremos:

$$\begin{array}{r|l} n & 8 \\ \cline{2-2} 2q & q \end{array}$$

com $0 \leq 2q < 8$. Portanto, $0 \leq q < 4$. Além disso, como

$$n = 8 \cdot q + 2q = 10q,$$

basta considerarmos os seguintes casos para o valor do resto:

i) se o resto for zero, o quociente será 0 e $n = 0$;

ii) se o resto for dois, o quociente será 1 e
$$n = 8 \cdot 1 + 2 = 10;$$

iii) se o resto for quatro, o quociente será 2 e
$$n = 8 \cdot 2 + 4 = 20; \text{ e}$$

iv) se o resto for seis, o quociente será 3 e
$$n = 8 \cdot 3 + 6 = 30.$$

Portanto, os números são 0, 10, 20 e 30.

12. (Adaptado do livro Círculos Matemáticos)

a) Basta aplicarmos o método das divisões sucessivas e descobrir que A é igual a

$$\begin{array}{r|l}
450 & 6 \\ \cline{2-2}
450 & 75 \;|\; 6 \\ \cline{1-1}
\color{red}{0} & 72 \quad 12 \;|\; 6 \\
& \color{red}{3} \quad\;\; 12 \quad \color{red}{2} \\
& \qquad\;\; \color{red}{0}
\end{array}$$

$$\longleftarrow$$

$$450 = (2030)_6$$

b) O número $A = 450 = (2030)_6$ termina em zero, logo sua representação como soma de potências de 6 começa a partir do 6^1 (e de modo crescente), assim o resultado é divisível por 6.

13. Se $13 \mid 10x + y$, então $13 \mid 10x + y - 13x - 13y$. Agora, temos que

$$10x + y - 13x - 13y = -3x - 12y = -3(x + 4y).$$

Como 13 não divide -3, então 13 divide $x + 4y$. Para provar o caminho de volta, basta tomarmos as operações inversas em cada passagem anterior.

Observação: Vejamos alguns exemplos da aplicação do que foi demonstrado no exercício 13.

a) O número 1001 é divisível por 13, para provar isso, tome $x = 100$ e $y = 1$ e aplique o exercício anterior:

$$1001 \to 100 + 4 \cdot 1 = 104.$$

Agora, faça $x' = 10$ e $y' = 4$, obtendo

$$104 \to 10 + 4 \cdot 4 = 26.$$

Como 13 divide 26, então 13 divide 1001.

b) Façamos o mesmo para verificar se 13 divide 2464085:

$$\begin{gathered}246408 + 4 \cdot 5 = 246428\\ 24642 + 4 \cdot 8 = 24674\\ 2467 + 4 \cdot 4 = 2483\\ 248 + 4 \cdot 3 = 260\\ 26 + 4 \cdot 0 = 26.\end{gathered}$$

Como 13 divide 26, então 13 divide 2464085.

14. Seja n esse número, logo existem a e b inteiros tais que $n = 9a + 3$ e $n = 11b + 4$. Ou seja,

$$\begin{aligned} 9a + 3 &= 11b + 4 \\ 9a &= 11b + 4 - 3 \\ 9a &= 11b + 1. \end{aligned}$$

Daí, 9 divide $11b + 1$. Substituindo os valores de b do conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 8\}$, podemos concluir que o menor b natural que satisfaz essa afirmação é $b = 4$. Portanto, $a = 5$ e $n = 48$.

15. Temos que

$$\begin{aligned} x11 &= 100x + 11 \\ 11x &= 110 + x \\ 1x1 &= 101 + 10x. \end{aligned}$$

Assim, ficamos com

$$\begin{aligned} 100x + 11 + 110 + x + 101 + 10x &= 777 \\ 111x + 222 &= 777 \\ x &= \frac{777 - 222}{111} = 5. \end{aligned}$$

16. Podemos escrever $k = 7q + 4$ para algum q inteiro.

a) Sendo assim,

$$\begin{aligned} k^2 + k + 1 &= (7q + 4)^2 + (7q + 4) + 1 \\ &= 49q^2 + 56q + 16 + 7q + 4 + 1 \\ &= 49q^2 + 63q + 21 \\ &= 7(7q^2 + 9q + 3). \end{aligned}$$

Portanto, $k^2 + k + 1$ é múltiplo de 7, ou seja, deixa resto 0 em sua divisão por 7.

b) Seja nk um múltiplo de k que, somado a k^2 produz um múltiplo de 7, assim temos

$$\begin{aligned} k^2 + nk &= (7q + 4)^2 + n(7q + 4) \\ &= 49q^2 + 56q + 16 + 7nq + 4n \\ &= 49q^2 + 56q + 7nq + 14 + 4n + 2 \\ &= 7(7q^2 + 8q + nq + 2) + 4n + 2. \end{aligned}$$

Agora, precisamos encontrar o menor inteiro n tal que $4n + 2$ seja múltiplo de 7. Substituindo os valores de n do conjunto $\{0, 1, 2, \ldots 6\}$, o menor valor será $n = 3$ e daí teremos $4n + 2 = 14$. O menor múltiplo será $3k$.

17. (Adaptado do livro Círculos Matemáticos)
Basta aplicarmos o método das divisões sucessivas por 2, fazendo uma mudança da base 10 para a base 2, e ficaremos com

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
127 & 2 & & & & & & \\
126 & 63 & 2 & & & & & \\
1 & 62 & 31 & 2 & & & & \\
 & 1 & 30 & 15 & 2 & & & \\
 & & 1 & 14 & 7 & 2 & & \\
 & & & 1 & 6 & 3 & 2 & \\
 & & & & 1 & 2 & 1 & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & \longleftarrow &
\end{array}$$

$$127 = (1111111)_2$$

Qualquer número pode ser escrito para a soma de potências de 2 e, nessa base, só temos os dígitos 0 e 1. Para pagar qualquer valor basta, descobrir quais porta-moedas serão usados na escrita do número na base 2, por exemplo, para o número 96 temos

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
96 & 2 & & & & & & \\
96 & 48 & 2 & & & & & \\
0 & 48 & 24 & 2 & & & & \\
 & 0 & 24 & 12 & 2 & & & \\
 & & 0 & 12 & 6 & 2 & & \\
 & & & 0 & 6 & 3 & 2 & \\
 & & & & 0 & 2 & 1 & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & \longleftarrow &
\end{array}$$

$$96 = (1100000)_2$$

Assim, usaremos os porta-moedas das potências 2^5 e 2^6.

18. (Extraído do vestibular do IME)
No sistema de base 7 só há 7 símbolos a serem usados: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sendo que a maior ordem não pode ser igual a 0 (com exceção do dígito de ordem única, o próprio zero). Assim, temos $6 \times 6 \times 5 = 180$ números com três algarismos distintos.

19. Queremos escrever $\frac{13}{16} = \frac{a}{6} + \frac{b}{6^2} + \frac{c}{6^3} + \ldots$ e, para tal, procederemos com a seguinte estratégia: Vamos multiplicar os membros por 6 para obtermos

$$\begin{aligned}
\frac{13}{16} &= \frac{a}{6} + \frac{b}{6^2} + \frac{c}{6^3} + \ldots \\
6 \cdot \frac{13}{16} &= 6 \cdot \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{6^2} + \frac{c}{6^3} + \ldots \right) \\
\frac{78}{16} &= a + \frac{b}{6} + \frac{c}{6^2} + \ldots \\
4 + \frac{14}{16} &= a + \frac{b}{6} + \frac{c}{6^2} + \ldots,
\end{aligned}$$

assim concluímos $a = 4$. Agora, multiplicando por 6^2, chegamos a

$$\begin{aligned}
\frac{13}{16} &= \frac{a}{6} + \frac{b}{6^2} + \frac{c}{6^3} + \ldots \\
\frac{13}{16} &= \frac{4}{6} + \frac{b}{6^2} + \frac{c}{6^3} + \ldots \\
\frac{13}{16} - \frac{4}{6} &= \frac{b}{6^2} + \frac{c}{6^3} + \ldots \\
\frac{7}{48} &= \frac{b}{6^2} + \frac{c}{6^3} + \ldots \\
6^2 \cdot \frac{7}{48} &= 6^2 \cdot \left(\frac{b}{6^2} + \frac{c}{6^3} + \ldots \right) \\
\frac{252}{48} &= b + \frac{c}{6} + \ldots \\
5 + \frac{12}{48} &= b + \frac{c}{6} + \ldots \\
5 + \frac{1}{4} &= b + \frac{c}{6} + \ldots,
\end{aligned}$$

e assim $b = 5$. Seguindo desse modo, chegaremos a $\frac{13}{16} = (0,4513)_6$.

20. (Extraído da Olimpíada da Rússia)

i) A resposta é sim, pois basta observar o exemplo do número 4455 e uma de suas permutações, o 5544, cuja soma $4455 + 5544 = 9999$. De modo geral, basta formar o número $\overline{abcd}$ sendo a soma dos valores aos pares igual a 9.

ii) O raciocínio anterior não se aplica neste item, pois a quantidade de termos de 99999 é ímpar e, caso fosse possível realizar tal soma, seria possível parear os dígitos do número original associando-os aos seus correspondentes no número com os algarismos permutados. De modo análogo, é possível mostrar que é impossível realizar tal soma e obter $\underbrace{9\ldots9}_{\text{n dígitos 9.}}$, sendo n ímpar.

21. (Extraído da Olimpíada do Austrália − 2013)
Podemos escrever $(abc)_7$, com a, b e c inteiros não negativos menores que 7. Assim, ficamos com

$$\begin{aligned}
(abc)_7 &= (cba)_9 \\
49a + 7b + c &= 81c + 9b + a \\
24a &= 40c + b.
\end{aligned}$$

Então $b = 24a - 40c = 8(3a - 5c)$. Como b é menor que 7 e múltiplo de 8, ele só pode ser 0. Agora, temos $3a - 5c = 0$ com $3a = 5c$. Como a e c são menores que 7, ficamos com $a = 5$ e $c = 3$. Por fim, o número é

$$(503)_7 = 5 \times 49 + 3 \times 1 = 248.$$

22. (Adaptado do AMC − 2012)
Essa dízima periódica pode ser expressa como o limite da soma de uma progressão geométrica decrescente infinita de razão $\frac{1}{x^3}$ e termo inicial $x^{-1} + 3x^{-2} + 3x^{-3}$, então

$$\begin{aligned}
a_x &= \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x^3}} \right) \\
&= \frac{x^2 + 3x + 3}{x^3} \cdot \frac{x^3}{x^3 - 1} \\
&= \frac{x^2 + 3x + 3}{x^3 - 1} \\
&= \frac{(x+1)^3 - 1}{x(x^3 - 1)}.
\end{aligned}$$

Alternativamente, poderíamos ter calculado

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^5} + \frac{3}{x^6} + \cdots \\
a_x \cdot x^3 &= x^2 + 3x + 3 + a_x \\
a_x(x^3 - 1) &= x^2 + 3x + 3 \\
a_x &= \frac{x^2 + 3x + 3}{x^3 - 1} = \frac{(x+1)^3 - 1}{x(x^3 - 1)}
\end{aligned}$$

Aplicando o produto telescópico chegamos a

$$\begin{aligned}
&a_4 \cdot a_5 \cdot \ldots \cdot a_{99} = \\
&\frac{(5^3 - 1)(6^3 - 1) \cdots (100^3 - 1)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot (4^3 - 1)(5^3 - 1) \cdots (99^3 - 1)} = \\
&\frac{999999}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 63} = \frac{13 \cdot 37 \cdot 33 \cdot 6}{99!}
\end{aligned}$$

Procedendo com algumas simplificações teremos

$$\frac{13 \cdot 37 \cdot 33 \cdot 6}{99!} = \frac{13 \cdot 37 \cdot 2}{98!}$$

Portanto, $m = 13 \cdot 37 \cdot 2 = 962$.

23. (Eureka 2)

a) A primeira jogada de Arnaldo obrigatoriamente é dividir por 2, pois, se subtrair 32, ele perde imediatamente. Assim, $40 \xrightarrow{\div 2} 20$. O mesmo ocorre agora na vez de Bernardo: $20 \xrightarrow{\div 2} 10$. E, novamente, na vez de Arnaldo: $10 \xrightarrow{\div 2} 5$. Ou seja, o desenrolar do jogo é $40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 1$, com vitória de Arnaldo.

b) É claro que o primeiro jogador a ter uma potência de 2 escrita na lousa em sua rodada vence imediatamente. Pensando então na representação de n na base 2, temos que, em cada rodada, o jogador pode optar por tirar o primeiro 1 da representação binária de n, da esquerda para a direita, (que significa subtrair a maior potência de 2) ou tirar um zero do final dessa representação (dividir por 2).
Como $2012 = (11111011100)_2$, se forem feitos apenas movimentos do tipo subtrair a maior potência de 2, o jogo terá 8 rodadas e Bernardo irá vencer. Logo, para tentar vencer, Arnaldo deve em alguma de suas jogadas utilizar um movimento do tipo dividir por 2. Porém, nesse caso, Bernardo também poderá fazer um movimento desse tipo, o jogo terá 10 rodadas e ele irá vencer. Portanto Bernardo possui uma estratégia vencedora.

24. (OBM − Eureka 2)
Vamos representar por 1 uma lâmpada acesa, e por 0 uma lâmpada apagada e interpretar o número obtido na base 2.
Veja que se, em algum passo, o último dígito for 0, ele será o único dígito alterado no próximo passo. Isto significa que o número aumentará 1 unidade. Caso contrário, o número terminará com um bloco de 1's antecipado por um 0, isto é, $(\ldots 011 \ldots 1)$, no próximo passo, o número será $(\ldots 100 \ldots 0)$. Mas observe que $(\ldots 011 \ldots 1) + 1 = \ldots 100 \ldots 0$. Portanto, em qualquer caso, o número k é sucedido pelo número $k + 1$.
a) Dada qualquer disposição inicial das lâmpadas, ou seja, qualquer número binário de no máximo n dígitos, em algum momento todos os dígitos serão iguais a 1, pois este é o maior número de n dígitos na base 2.
b) Existem 2^n números de no máximo n dígitos na base 2. Começando com 0, devemos chegar a $2^n - 1$, passando por todos os naturais intermediários. São necessários, então, $2^n - 1$ segundos.
c) Observe que a configuração inicial representa o número $2^5 + 2^4 + 2 = 50$. Para $n = 11$, todas as lâmpadas estarão acesas depois de $2^{11} - 1 - 50 = 1997$ segundos.

25. (Extraído da Olimpíada do Canadá)
Podemos escrever $N = 7(b^2 + b + 1) = a^4$ para $a \in \mathbb{Z}$. Como $7 \mid a^4$ e 7 é primo, então $a^4 \geq 7^4$. Sendo assim, como queremos minimizar b, devemos fazer o mesma para a, e podemos verificar que $a = 7$ resolve o problema. Nesse caso, $a = 7$ e $b^2 + b + 1 = 7^3$, calcular a raiz $b = 18$.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com