Módulo de Progressões Geométricas

Exercícios de Aprofundamento

1^a série E.M.

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

Progressões Geométrica
Exercícios de Aprofundamento

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. João iniciou um trabalho numa nova firma logo no início do ano, com um salário inicial de 1000, e combinou que a cada fim de ano teria um aumento de 10% sobre o salário no ano anterior. Utilizando os dados da tabela de aproximações abaixo, responda o que se pede.

Potência	Resultado
$1,1^2$	$1,21$
$1,1^3$	$1,331$
$1,1^4$	$1,464$
$1,1^7$	$1,949$
$1,1^8$	$2,144$
$1,1^{14}$	$3,797$
$1,1^{15}$	$4,177$
$1,1^{16}$	$4,595$

a) Qual o salário de João no segundo ano na empresa?

b) Qual o aumento percentual entre os salários de João no quarto ano em relação ao salário do segundo ano?

c) Depois de quantos anos João ganhará mais do que 2000 reais?

d) Depois de quantos anos João ganhará mais do que 4000 reais?

Exercício 2. Sendo $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ e $(b_1, b_2, b_3, \dots)$ duas P.Gs. de mesma razão q positiva, $a_1 = 20$, $b_1 = 60$ e $a_{16} = b_{14}$. Calcule:

a) qual o valor da razão?

b) qual o valor de a_5?

Exercício 3. Numa P.G. de números reais, a soma dos primeiros dois termos é 7 e a soma dos seis primeiros é 91. Qual a soma dos quatro primeiros termos?

Exercício 4. Determine:

a) o produto dos vinte primeiros termos de uma P.G de razão $q = 2$ e primeiro termo 3.

b) uma fórmula geral do produto P_n dos termos de uma P.G. finita em função de a_1, q e n.

c) uma fórmula geral do produto P_n dos termos de uma P.G. finita e com termos positivos em função de a_1, a_n e n.

Exercício 5. Para fazer a aposta mínima na mega-sena uma pessoa deve escolher 6 números diferentes em um cartão de apostas que contém os números de 1 a 60. Uma pessoa escolheu os números de sua aposta, formando uma progressão geométrica de razão inteira.
Classifique cada proposição abaixo como (V)erdadeira ou (F)alsa.

(___) Essa pessoa apostou no número 1.

(___) A razão da PG é maior do que 3.

(___) Essa pessoa apostou só números menores que 33.

(___) A razão da PG é 2.

(___) Essa pessoa apostou somente em números pares.

Exercício 6. A Interpolação Geométrica define-se quando inserimos uma determinada quantidade de termos entre os extremos de uma P.G. (entre o primeiro e último termos). Observe o exemplo abaixo e depois interpole a quantidade de termos pedida em cada item nas Progressões Geométricas de termos positivos dadas abaixo.

> Na P.G. de termos positivos $(16, \_\_, \_\_, \_\_, 81)$ a interpolação geométrica dos três termos pode ser encontrada após o cálculo da razão da sequência. Sendo assim, temos
>
> $$\begin{aligned} a_5 &= a_1 \cdot q^4 \\ 81 &= 16 \cdot q^4 \\ q^4 &= \frac{81}{16} \\ q &= \sqrt[4]{\frac{3^4}{2^4}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$
>
> Daí, finalizamos com
>
> $$\begin{aligned} a_2 &= 16 \cdot \frac{3}{2} = 24. \\ a_3 &= 24 \cdot \frac{3}{2} = 36. \\ a_4 &= 36 \cdot \frac{3}{2} = 54. \end{aligned}$$

a) $(4, \_\_, \_\_, 108)$

b) Para interpolar três meios geométricos entre 6 e 4374, qual deve ser a razão?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Uma empresa de telecomunicação planeja iniciar suas atividades em determinada região, comercializando pacotes de programas de TV por assinatura. Sua meta para o primeiro ano de operações é vender 25 pacotes no primeiro mês, 50 pacotes no segundo mês, 100 pacotes no terceiro mês, e assim por diante, ficando com a sequência $(25, 50, 100, 200, 400, \dots)$. Sendo assim:

a) qual a meta de pacotes a serem vendidos no 12° mês?

b) seguindo por mais tempo o mesmo planejamento, qual o mês terá a meta de 6553600 pacotes?

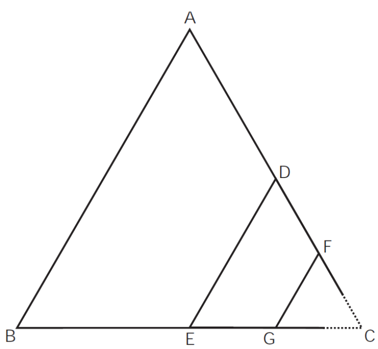
Exercício 8. Suponha que a população de certo país aumente 2% ao ano. Se no ano 2017 a população desse país é de 1000000 de habitantes, então qual será a população no ano 2020?

Exercício 9. Duas sequências f_t e g_t fornecem o número de ratos e o número de habitantes de uma certa cidade a depender do tempo t (em anos), respectivamente, num período de 0 a 5 anos. Suponha que no tempo inicial ($t = 0$) existam nessa cidade 100000 ratos e 70000 habitantes, que o número de ratos dobra a cada ano e que a população humana cresce em 2000 habitantes por ano. Pede-se:

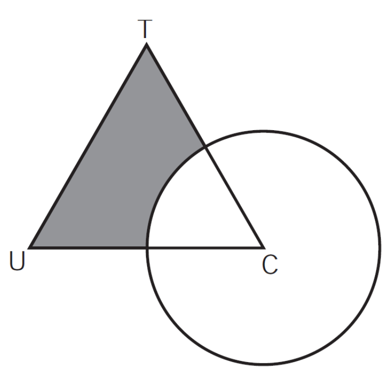
a) A partir das regras do enunciado, quais são as leis das sequências f_t e g_t?

b) Após 5 anos, qual será o número de ratos por habitante?

Exercício 10. A partir do triângulo equilátero ABC de lado $\ell_1 = 2^{10}$, obtém-se o segundo triângulo equilátero DEC de lado $\ell_2 = \dfrac{\ell_1}{2}$, e o terceiro triângulo equilátero FGC de lado $\ell_3 = \dfrac{\ell_2}{2}$.



Continuando nessa progressão geométrica, obtém-se o décimo triângulo equilátero TUC, de lado $\ell_{10} = \dfrac{\ell_9}{2}$, onde o vértice C é o centro da circunferência de raio $R = \dfrac{\ell_{10}}{2}$, conforme a figura.



Qual o valor da área pintada da segunda figura?

Exercício 11. O produto dos cinco primeiros termos de uma progressão geométrica é 1 (um), ao passo que o produto de seus cinco últimos termos é 1024. Considerando que essa progressão possui apenas seis termos, então sua razão q?

Exercício 12. Com os 13 dados de uma amostra dispostos numa sequência em ordem crescente, verificou-se que os seus termos formam uma progressão geométrica tal que a soma do terceiro e do nono termos é igual a 54, enquanto que o quarto e o décimo termos têm soma igual a $54\sqrt{2}$. Sendo assim, pergunta-se:

a) qual o valor da razão dessa P.G.?

b) qual o valor do primeiro termo dessa P.G.?

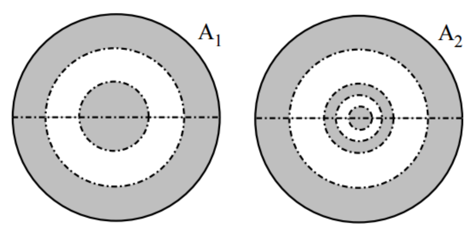
c) qual o valor a mediana dessa amostra?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 13. A sequência de números reais a, b, c, d forma, nessa ordem, uma progressão aritmética cuja soma é 110, a sequência de números reais a, b, e, f forma, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão 2. Qual o valor da soma $d + f$?

Exercício 14. As progressões geométricas $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ e $(b_1, b_2, b_3, \ldots)$ possuem mesma razão, com $a_1 = 27$, $b_1 = 99$ e $a_{15} = b_{11}$. Sendo assim, qual o valor de a_9?

Exercício 15. No plano, considere um disco de raio R, chame este conjunto de A_0. Divida um raio de A_0 em três segmentos congruentes e retire de A_0 a coroa circular de raios $\dfrac{1}{3}R$ e $\dfrac{2}{3}R$, chame este conjunto de A_1 (apenas a área cinza da figura abaixo à esquerda). O conjunto A_1 contém um disco de raio $R_1 = \dfrac{1}{3}R$, divida um raio deste disco em três segmentos e, mais uma vez retire de A_1 a coroa circular de raios $\dfrac{1}{3}R_1$ e $\dfrac{2}{3}R_1$, chame este conjunto de A_2 (apenas a área cinza da figura abaixo à direita). Continue este processo indefinidamente e seja A o conjunto resultante.



a) Calcule a á área do conjunto A_1

b) Calcule a á área do conjunto A_2

Exercício 16. Se $a_1 = 1$ e, para $n \geq 1$, $a_{n+1} = 5a_n + 3$, determine o valor de a_n em função de n.

Exercício 17. Uma sequência de três números reais forma uma progressão aritmética com primeiro termo igual a 9. Se o número 2 é adicionado ao segundo termo e se o número 20 é adicionado ao terceiro termo, os três números resultantes formam uma progressão geométrica. Qual é o menor valor possível do terceiro termos dessa progressão geométrica?

Respostas e Soluções.

1. Basta aplicarmos no salário s_n vigente, com $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, que é uma progressão geométrica de fator $1,1$ e termo inicial $s_1 = 1000$, para descobrir quanto João receberá ao começar um novo ano.

a) Sendo assim, temos que $s_2 = 1000 \cdot 1,1 = 1100$ reais.

b) Basta fazermos $\dfrac{s_4}{s_2} = \dfrac{1000 \cdot 1,1^3}{1000 \cdot 1,1} = 1,1^2 = 1,21$. O que permite concluir que houve um aumento de 21%.

c) Precisamos calcular o menor n tal que $a_n > 2000$, e para tal desenvolvemos

$$\begin{aligned} a_n &> 2000 \\ 1000 \cdot 1,1^n &> 2000 \\ 1,1^n &> 2, \end{aligned}$$

e olhando a tabela do enunciado, concluímos $7 < n < 8$. Assim, apenas no oitavo ano ele ganhará mais do que 2000.

d) Agora, busca-se o mínimo n tal que $a_n > 4000$, e para tal usamos

$$\begin{aligned} a_n &> 4000 \\ 1000 \cdot 1,1^n &> 4000 \\ 1,1^n &> 4, \end{aligned}$$

e olhando a tabela do enunciado, concluímos $14 < n < 15$. Assim, no décimo quinto ano ele ganhará mais do que 4000.

2. Podemos escrever que

$$\begin{aligned} a_{16} &= b_{14} \\ a_1 \cdot q^{15} &= b_1 \cdot q^{13} \\ 20 \cdot q^{15} &= 60 \cdot q^{13} \\ q^2 &= \frac{60}{20} \\ q &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

a) Assim, a razão é igual a $\sqrt{3}$.

b) Temos $a_5 = a_1 \cdot q^4 = 20 \cdot \sqrt{3}^4 = 20 \cdot 9 = 180$.

3. (Extraído do AHSME)
Do enunciado temos que

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 7 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 91 \end{cases}$$

e aplicando as fórmulas de P.G. (sendo $a_1 = x$ e a razão q) obtemos

$$\begin{cases} x + xq = 7 \\ x + xq + xq^2 + xq^3 + xq^4 + xq^5 = 91. \end{cases}$$

Na segunda equação aplicaremos uma fatoração por agrupamento, e chegaremos a

$$\begin{aligned} x + xq + xq^2 + xq^3 + xq^4 + xq^5 &= 91 \\ (x + xq) + q^2(x + xq) + q^4(x + xq) &= 91 \\ (x + xq)(1 + q^2 + q^4) &= 91 \\ 7(1 + q^2 + q^4) &= 91 \\ (1 + q^2 + q^4) &= 13 \\ q^4 + q^2 - 12 &= 0. \end{aligned}$$

Temos então uma equação biquadrada de raízes $q_1^2 = -4$ (e $q_1 \notin \mathbb{R}$) ou $q_2^2 = 3$. Portanto,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= \\ x + xq + xq^2 + xq^3 &= \\ (x + xq) + q^2(x + xq) &= \\ (x + xq)(1 + q^2) &= \\ 7 \cdot (1 + 3) &= 28. \end{aligned}$$

4. (Adaptado do site TutorBrasil)

a) A P.G. pedida é

$$(3, 6, 12, 24, 48, \ldots, 3 \cdot 2^{19})$$

e o produto desses termos é

$$\begin{aligned} 3 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 24 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2^{19} &= \\ 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 2^4 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2^{19} &= \\ 3^{20} \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^{19} &= \\ 3^{20} \cdot 2^{1+2+3+\ldots+19} &= \\ 3^{20} \cdot 2^{\frac{(1+19)\cdot 19}{2}} &= 3^{20} \cdot 2^{190}. \end{aligned}$$

b) De modo geral, dada a P.G.

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

com $a_1 = x$ e razão q, podemos escrever

$$\begin{aligned} P_n &= a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n \\ &= x \cdot x \cdot q \cdot c \cdot q^2 \cdot \ldots \cdot x \cdot q^{n-1} \\ &= x^n \cdot q^1 \cdot q^2 \cdot \ldots \cdot q^{n-1} \\ &= x^n \cdot q^{\frac{(1+n-1)\cdot(n-1)}{2}} \\ &= (a_1)^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}. \end{aligned}$$

c) Da última igualdade desenvolvemos

$$
\begin{aligned}
P_n &= (a_1)^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}\\
(P_n)^2 &= \left((a_1)^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)^2\\
(P_n)^2 &= (a_1)^{2n} \cdot q^{n(n-1)}\\
(P_n)^2 &= \left((a_1)^2 \cdot q^{(n-1)}\right)^n\\
(P_n)^2 &= \left(a_1 \cdot a_1 \cdot q^{(n-1)}\right)^n\\
P_n &= \sqrt{\left(a_1 \cdot a_1 \cdot q^{(n-1)}\right)^n}\\
P_n &= \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}.
\end{aligned}
$$

5. (Adaptado do exame da FER)
A menor razão inteira positiva é o 1, mas nesse caso a P.G. é estacionária (constante e igual a 1). Assim, a mínima razão é o 2 e sendo $a_1 = x$, temos

$$(x, 2x, 4x, 8x, 16x, 32x),$$

e se $x \in \{2, 3, 4, \cdots, 60\}$, então $32x > 60$. Daí, $x = 1$. Para $q = 3$, chegamos a

$$(x, 3x, 9x, 27x, 81x, 243x),$$

e pelo mesmo argumento anterior temos $81x > 60$ para todo $x \in \mathbb{Z}_+^*$. Por fim, a sequência deve ter $q = 2$ e pode ser escrita como

$$(1, 2, 4, 8, 16, 32),$$

Temos as respostas em ordem: V, F, V, V, F.

6. Vamos aplicar a estrutura exposta no exemplo.

a) Sendo $a_1 = 4$, $a_4 = 108$, segue-se com

$$
\begin{aligned}
a_4 &= a_1 \cdot q^3\\
108 &= 4 \cdot q^3\\
q^3 &= 27\\
q &= 3.
\end{aligned}
$$

Daí, finalizamos com

$$
\begin{aligned}
a_2 &= 4 \cdot 3 = 12.\\
a_3 &= 12 \cdot 3 = 36.\\
a_4 &= 36 \cdot 3 = 108.
\end{aligned}
$$

b) **(Extraído do vestibular da PUC)**
Sendo $a_1 = 6$, $a_5 = 4374$, segue-se com

$$
\begin{aligned}
a_5 &= a_1 \cdot q^4\\
4374 &= 6 \cdot q^4\\
q^4 &= 729\\
q &= \sqrt[4]{3^6} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Daí, finalizamos com

$$
\begin{aligned}
a_2 &= 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}.\\
a_3 &= 18\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 162.\\
a_4 &= 162 \cdot 3\sqrt{3} = 486\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

7. (Adaptado do Brainly.com.br)
Podemos concluir que $s_n = (25, 50, 100, 200, 400, \ldots)$ é uma P.G. de razão $q = 2$ e lei $s_n = 25 \cdot 2^{n-1}$, com $n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, \}$.

a) Sendo assim, ficamos com

$$
\begin{aligned}
s_{12} &= s_1 \cdot 2^{11}\\
s_{12} &= 51200 \text{ pacotes.}
\end{aligned}
$$

b) Agora, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
s_n &= s_1 \cdot 2^{n-1}\\
6553600 &= 25 \cdot 2^{n-1}\\
262144 &= 2^{n-1}\\
2^{n-1} &= 2^{18}\\
n - 1 &= 18\\
n &= 19.
\end{aligned}
$$

8. Do enunciado podemos concluir que a situação trata de uma P.G. com $q = 1,02$, $a_1 = 10^6$ e buscamos a_4. Sendo assim,

$$
\begin{aligned}
a_4 &= a_1 \cdot q^3\\
a_4 &= 10^6 \cdot 1,02^3\\
a_4 &= 10^6 \cdot 1,061208\\
a_4 &= 1061208 \text{ habitantes.}
\end{aligned}
$$

9. Do enunciado, podemos concluir que f_t é uma P.G. de razão $q = 2$ e g uma P.A. de diferença comum $d = 2000$.

a) Sendo assim, ficamos com

$$
\begin{aligned}
f_t &= 1000 \cdot 2^t\\
g_t &= 70000 + 2000 \cdot t, \text{ ambas com } t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.
\end{aligned}
$$

b) Após 5 anos, temos $f_5 = 10000 \cdot 2^5 = 320000$ ratos e $g_5 = 70000 + 2000 \cdot 5 = 80000$ habitantes e a razão entre ratos e habitantes é

$$\frac{320000}{80000} = 4.$$

10. (Adaptado do exame da MACK − 2013)
Do enunciado ficamos com

$$\ell_{10} = \frac{\ell_9}{2} = \ell_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 2^{10} \cdot \frac{1}{2^9} = 2.$$

Sendo assim, ficamos com $R = \dfrac{2}{2} = 1$. E a área pintada A

fica

$$\begin{aligned}
A &= \text{Área do } \triangle TUC - \frac{\text{Área do Círculo}}{6}\\
A &= \frac{\ell_{10}^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi R^2}{6}\\
A &= \frac{2^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi \cdot 1^2}{6}\\
A &= \frac{4\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\\
A &= \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

11. (Adaptado do exame da IDECAN − 2017)
A P.G. em questão pode ser escrita como

$$(x, xq, xq^2, xq^3, xq^4, xq^5)$$

e dados se equacionam como

$$\begin{aligned}
x \cdot xq \cdot xq^2 \cdot xq^3 \cdot xq^4 &= 1\\
xq \cdot xq^2 \cdot xq^3 \cdot xq^4 \cdot xq^5 &= 1024
\end{aligned}$$

Assim, calculamos

$$\begin{aligned}
x^5q^{10} &= 1\\
x^5q^{15} &= 2^{10},
\end{aligned}$$

e chegamos a

$$\begin{aligned}
q^5 &= 2^{10}\\
q &= \sqrt[5]{2^{10}}\\
q &= 4.
\end{aligned}$$

12. (Adaptado do exame da USP − 2014)
Podemos estruturar o seguinte sistema

$$\begin{cases} a_3 + a_9 = 54\\ a_4 + a_{10} = 54\sqrt{2} \end{cases}$$

a) A partir da segunda equação do sistema podemos desenvolver

$$\begin{aligned}
a_4 + a_{10} &= 54\sqrt{2}\\
a_3 \cdot q + a_9 \cdot q &= 54\sqrt{2}\\
q(a_3 + a_9) &= 54\sqrt{2}\\
q(54) &= 54\sqrt{2}\\
q &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

b) Substituindo o valor encontrado na primeira equação do sistema teremos

$$\begin{aligned}
a_3 + a_9 &= 54\\
a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^8 &= 54\\
a_1 \cdot \sqrt{2}^2 + a_1 \cdot \sqrt{2}^8 &= 54\\
2a_1 + 16a_1 &= 54\\
18a_1 &= 54\\
a_1 &= \frac{54}{18} = 3.
\end{aligned}$$

c) Agora, a mediana é o termo

$$\begin{aligned}
a_7 &= a_1 \cdot q^6\\
&= 3 \cdot \sqrt{2}^6\\
&= 3 \cdot 8 = 24.
\end{aligned}$$

13. (Adaptado do exame da EsPCEx)
Podemos escrever

$$\begin{aligned}
a + d &= b + c\\
a + c &= 2b\\
b + d &= 2c\\
a + b + c + d &= 110\\
b &= 2a\\
e &= 4a\\
f &= 8a
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
c &= 3a\\
d &= 4a\\
a + 2a + 3a + 4a &= 110\\
a &= 11
\end{aligned}$$

Fechando com $d = 44$, $f = 88$ e

$$d + f = 44 + 88 = 132.$$

14. (Extraído do AIME − 2012)
Podemos escrever que

$$\begin{aligned}
a_{15} &= b_{11}\\
a_1 \cdot q^{14} &= b_1 \cdot q^{10}\\
27 \cdot q^{14} &= 99 \cdot q^{10}\\
q^4 &= \frac{99}{27}\\
&= \frac{11}{2}
\end{aligned}$$

e o $a_9 = a_1 \cdot q^8 = 27 \cdot \left(\frac{11}{3}\right)^2 = 27 \cdot \frac{121}{9} = 363.$

15. (Adaptado do vestibular do IME) Do enunciado inferimos

$$\begin{aligned}
A_n &= A_{n-1} - \pi\left(\frac{2R_{n-1}}{3}\right)^2 + \pi\left(\frac{R_{n-1}}{3}\right)^2\\
A_n &= A_{n-1} - \frac{4\pi R_{n-1}^2}{9} + \frac{\pi R_{n-1}^2}{9}\\
A_n &= A_{n-1} - \frac{3\pi R_{n-1}^2}{9}\\
A_n &= A_{n-1} - \frac{\pi R_{n-1}^2}{3}, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

a) Assim

$$\begin{aligned}
A_0 &= \pi R^2 \\
R_0 &= R, \text{ por definição} \\
A_1 &= A_0 - \frac{\pi R^2}{3} \\
&= \pi R^2 - \frac{\pi R^2}{3} \\
&= \frac{2\pi R^2}{3}.
\end{aligned}$$

b) Na sequência

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{2\pi R^2}{3}. \\
A_2 &= A_1 - \frac{\pi R_1^2}{3} \\
&= \frac{2\pi R^2}{3} - \frac{\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2}{3} \\
&= \frac{2\pi R^2}{3} - \frac{\pi R^2}{27} \\
&= \frac{17\pi R^2}{27}.
\end{aligned}$$

16. Somando c a cada um dos membros da fórmula de recorrência, temos

$$\begin{aligned}
a_{n+1} + c &= 5a_n + 3 + c \\
&= 5\left(a_n + \frac{3+c}{5}\right)
\end{aligned}$$

Note que $\frac{3+c}{5} = c$ se, e somente, $c = 3/4$. Escolhendo esse valor para c e definindo $b_n = a_n + c$, obtemos $b_{n+1} = 5b_n$ com $b_1 = 1 + 3/4 = 7/4$. A sequência b_n é uma progressão geométrica de razão 5 e seu termo geral é $b_n = 5^{n-1} \cdot 7/4$. Portanto

$$\begin{aligned}
a_n &= b_n - c \\
&= 5^{n-1} \cdot \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \\
&= \frac{7 \cdot 5^{n-1} - 3}{4}.
\end{aligned}$$

17. (Extraído da AMC) Seja d a diferença comum da progressão aritmética. Então os termos da progressão geométrica são 9, $9 + d + 2 = 11 + d$ e $9 + 2d + 20 = 29 + 2d$. Como o termo do meio é a média geométrica dos outros termos, $(11 + d)^2 = 9(2d + 29)$ e daí $(d + 14)(d - 10) = 0$. O menor valor possível ocorre quando $d = -14$, ou seja, quando o terceiro termo for $29 + 2d = 1$.

ELABORADO POR TIAGO MIRANDA E CLEBER ASSIS
PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
contato@cursoarquimedes.com