

Módulo de Matemática Financeira

Juros Simples e Compostos

1^a série E.M.

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis



1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Um certo capital foi aplicado por 5 meses. Ao fim desse prazo, só de juros simples, o aplicador recebeu o triplo do dinheiro. Qual é a taxa mensal dessa aplicação?

Exercício 2. Mário devia, em seu cartão de crédito, R\$ 2.000,00. Como não conseguiu pagar, em dois meses essa dívida aumentou para R\$ 2.880,00. Nesse caso, qual foi a taxa de juros simples cobrada mensalmente pelo cartão de crédito?

Exercício 3. O rendimento médio mensal das famílias catarinenses é R\$ 1368,00, segundo dados do IBGE. A família Silva possui essa renda e pegou um empréstimo no valor de 30% da mesma, para pagá-lo a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês.

- Quanto essa família pegou emprestado?
- Qual o valor que a família irá pagar (montante final) se saldar essa dívida em 2 meses?

Exercício 4. Duas lojas de roupas vendem calças jeans de mesma marca e modelo pelo mesmo preço, se pago à vista. Mas, se parcelado, a primeira cobra 60% de entrada e o restante para 30 dias, com 10% de juros no saldo remanescente. A segunda loja cobra 40% de entrada e o restante para 30 dias, com 8% de juros no saldo remanescente. Em qual das duas lojas é mais vantajoso se o cliente decidir comprar parcelado?

Exercício 5. Uma imobiliária exige dos novos locatários de imóveis o pagamento, ao final do primeiro mês no imóvel, de uma taxa, junto com a primeira mensalidade de aluguel. Rafael alugou um imóvel nessa imobiliária e pagou R\$ 900,00 ao final do primeiro mês. No período de um ano de ocupação do imóvel, ele contabilizou gastos totais de R\$ 6950,00 com a locação do imóvel. Na situação descrita, qual foi o valor da taxa paga?

Exercício 6. Um médico tomou um empréstimo, a juros compostos de 2% ao mês, para investir em sua clínica, esperando que tal investimento lhe dê 8% ao mês, com o rendimento sendo reinvestido na própria clínica. Nessas condições, em quanto tempo o investimento valerá o triplo da dívida?
Se preciso use $\log 2 = 0,3$, $\log 3 = 0,48$ e $\log 17 = 1,23$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Um capital de C reais foi investido a juros compostos de 10% ao mês e gerou, em três meses, um montante de R\$ 53240,00. Calcule o valor, em reais, do capital inicial C .

Exercício 8. Ao aplicar hoje 100 mil reais a juros compostos a uma taxa de juros anual positiva, Jaime receberá 60 mil reais daqui a um ano e 55 mil reais daqui a dois anos. Se a mesma aplicação fosse feita por dois anos a juros compostos e à mesma taxa anterior, quanto Jaime receberia?

Exercício 9. Márcio gasta 18% de seu salário para pagar o aluguel de sua casa. Se este ano o aluguel subiu 24,2%, e seu salário, 8%, qual será a nova taxa percentual do salário de Márcio correspondente ao novo aluguel de sua casa?

Exercício 10. Os capitais $C_1 = \text{R\$ } 2.000,00$ e $C_2 = \text{R\$ } 1.500,00$ são aplicados a juros simples de 1% ao mês e 18% ao ano, respectivamente, durante t meses. Após esse tempo, a soma dos montantes produzidos pelas duas aplicações é de R\$ 3840,00. Nesse contexto, pergunta-se:

- qual o tempo t da aplicação?
- qual o rendimento de C_1 no período t ?

Exercício 11. Em uma aplicação de R\$ 15000,00, a juros compostos de 8%, capitalizados semestralmente, quantos meses serão necessários para obter a quantia de R\$ 21600,00? (Dados: $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,47$)

Exercício 12. Uma senhora comprou uma televisão cujo preço à vista é R\$ 2100,00. Ela pagará essa televisão em 2 prestações mensais iguais, a juros compostos de 10% a.m., devendo a primeira prestação ser paga um mês após a compra. Qual o valor da prestação?

Exercício 13. Pensando em montar seu próprio consultório, Natália começou a economizar desde que entrou no curso de Medicina. Ao passar no vestibular, ela ganhou R\$ 5000,00 de seus pais e os aplicou a uma taxa de 0,5% ao mês a juros compostos. Além disso, mensalmente, ela depositou R\$ 100,00 à mesma taxa de juros compostos. Hoje, passados 5 anos, ou seja, 60 meses, pergunta-se

- qual o montante do rendimento dos R\$ 5000,00?
- qual o valor economizado por Natália com suas aplicações mensais?

(Considere $1,005^{60} = 1,35$)

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 14. João fez um empréstimo de R\$ 800,00 em uma financeira, que cobra uma taxa de juros de 10% ao mês, comprometendo-se a saldar a dívida em dois meses. No fim do primeiro mês, Pedro pagou à financeira uma parcela de R\$ 580,00. Assim sendo, qual o valor que ficará para João pagar ao final do segundo mês?

Exercício 15. Ronaldo aplicou seu patrimônio em dois fundos de investimentos, *A* e *B*. No período de um ano ele teve um rendimento de R\$ 26250,00 aplicando 75% de seu patrimônio em *A* e 25% em *B*. Sabendo que o fundo *B* rendeu uma taxa de juro anual 20% superior à de *A*, quanto ele teria recebido se tivesse aplicado 100% do patrimônio em *A*?

Exercício 16. Maria pegou no banco um empréstimo de R\$ 2000,00, que cobra uma taxa de juros de 5% ao mês, comprometendo-se a saldar a dívida em quatro meses. No fim do primeiro mês, Maria pagou uma parcela de R\$ 600,00. No fim do segundo mês, ela pagou R\$ 575,00. No fim do terceiro mês, pagou R\$ 550,00. Assim sendo, qual o valor que ficará para Maria pagar ao final do quarto mês?

Exercício 17. Em todos os dias 10 dos meses de janeiro, fevereiro e março de um certo ano, o Sr. João aplicou a mesma quantia de R\$ 1000,00 à taxa de juros compostos de 10% ao mês. Sendo assim, qual o montante dessa aplicação no dia 10 de abril desse mesmo ano?

Exercício 18. Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de 3000°C e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min. Qual o tempo aproximado decorrido, em horas, até que a liga atinja 30°C ?

Use 0,477 como aproximação para $\log 3$ e 1,041 como aproximação para $\log 11$.

Exercício 19. Pedro fez um empréstimo, contratado com juros de 4% ao mês, que deve ser pago em dez prestações mensais consecutivas de R\$ 1000,00. Ao pagar a sexta prestação, ele decidiu antecipar o pagamento das quatro últimas parcelas. Dado que $(1,04)^4 = 1,17$, qual o valor aproximado antecipado referente às quatro últimas prestações?

ELABORADO POR TIAGO MIRANDA E CLEBER ASSIS
PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM

Respostas e Soluções.

1. Do enunciado, conclui-se que $J = 3x$, $C = x$, $n = 5$ e

$$\begin{aligned} J &= Cin \\ 3x &= x \cdot i \cdot 5 \\ 3 &= i \cdot 5 \\ i &= \frac{3}{5} \\ i &= 60\% \end{aligned}$$

2. Do enunciado, conclui-se que $M = 2880$, $C = 2000$, $n = 2$ e

$$\begin{aligned} J &= Cin \\ 880 &= 2000 \cdot i \cdot 2 \\ i &= \frac{880}{4000} \\ i &= \frac{22}{100} \\ i &= 22\% \end{aligned}$$

3. (Adaptado do vestibular do IFSC – 2017)

Como a renda é de R\$ 1368,00, temos que

a) o empréstimo foi de

$$30\% \cdot 1368 = \frac{30}{100} \cdot 1368 = 410,40 \text{ reais.}$$

b) Se a dívida for quitada em 2 meses, o valor majorado será igual a

$$\begin{aligned} M &= C \cdot (1 + i)^t \\ M &= 410,40 \cdot (1 + 0,02)^2 \\ M &= 410,40 \cdot (1,02)^2 \\ M &= 410,40 \cdot (1,02)^2 \\ M &\cong 426,98. \end{aligned}$$

4. (Adaptado do vestibular do IFRS – 2017)

Suponhamos que a calça custe R\$ 100,00 (poderia ser outro valor P qualquer, pois os dados relevantes aqui são as proporções do preço total).

- A primeira loja cobra 60 reais de entrada, então sobre os 40 restantes incidirá um juro de 10% de $40 = 4$ reais, restando a pagar 44 reais.
- A segunda loja cobra 40 reais de entrada, então sobre os 60 restantes incidirá um juro de 8% de $60 = 8$ reais, restando a pagar 48 reais.

Sendo assim, a compra na primeira loja é mais vantajosa, por ser mais barata.

5. (Adaptado do vestibular da UNESP – 2016)

Seja x a taxa e y o aluguel mensal. Ao final do primeiro mês ele pagou $x + y = 900$, e ao final de um ano $x + 12y = 6950$. Sendo assim, podemos escrever que

$$\begin{cases} x + 12y = 6950 \\ x + y = 900, \end{cases}$$

e ao subtrair essas equações obtemos

$$\begin{aligned} 11y &= 6050 \\ y &= \frac{6050}{11} = 550. \end{aligned}$$

Daí, teremos

$$\begin{aligned} x + 550 &= 900 \\ x &= 350 \text{ reais.} \end{aligned}$$

6. (Adaptado do vestibular da Unifacs (BA) – 2016)

Precisamos calcular o período t tal que

$$C \cdot (1 + 0,08)^t = 3(C \cdot (1 + 0,02)^t)$$

$$1,08^t = 3 \cdot 1,02^t$$

$$\log 1,08^t = \log 3 \cdot 1,02^t$$

$$\log 1,08^t = t \cdot \log 1,02$$

$$t \cdot \log 1,08 - t \cdot \log 1,02 = \log 3$$

$$t \cdot (\log 1,08 - \log 1,02) = \log 3$$

$$t \cdot \log \left(\frac{1,08}{1,02} \right) = \log 3$$

$$t \cdot \log \left(\frac{108}{102} \right) = \log 3$$

$$t \cdot \log \left(\frac{2^2 \cdot 3^3}{2 \cdot 3 \cdot 17} \right) = \log 3$$

$$t \cdot \log \left(\frac{2 \cdot 3^2}{17} \right) = \log 3$$

$$t \cdot (\log 2 + \log 3^2 - \log 17) = \log 3$$

$$t \cdot (\log 2 + 2 \cdot \log 3 - \log 17) = \log 3$$

$$t \cdot (0,3 + 2 \cdot 0,48 - 1,23) = 0,48$$

$$t = \frac{0,48}{0,03}$$

$$t = 16 \text{ meses.}$$

7. (Adaptado do vestibular da UERJ – 2017)

Sendo C o capital aplicado, podemos escrever que

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$53240 = C \cdot (1 + 0,1)^3$$

$$C = \frac{53240}{1,331}$$

$$C = 40000 \text{ reais.}$$

8. (Adaptado do vestibular da FGV – 2016)

Podemos escrever que o montante M_1 ao final de um ano será

$$M_1 = 100 \cdot (1 + i)^1$$

$$M_1 = 100(1 + i),$$

esse valor será descontado de 60 mil e aplicado por mais um ano com a mesma taxa, resultando em 55 mil, o que pode ser escrito como

$$[100(1 + i) - 60] \cdot (1 + i)^1 = 55$$

$$100(1 + i)^2 - 60(1 + i) = 55$$

$$20(1 + i)^2 - 12(1 + i) - 11 = 0$$

e resolvendo a equação do 2º grau encontrado teremos

$$(1 + i) = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 20 \cdot (-11)}}{2 \cdot 20}$$

$$(1 + i) = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 880}}{40}$$

$$(1 + i) = \frac{12 \pm \sqrt{1024}}{40}$$

$$(1 + i) = \frac{12 \pm 32}{40},$$

e como a taxa é positiva devemos seguir com

$$1 + i = \frac{12 + 32}{40}$$

$$1 + i = \frac{44}{40},$$

$$i = 1,1 - 1$$

$$= 0,1.$$

Por fim, aplicando 100 mil reais à taxa de 10% ao ano, por dois anos, obteremos

$$M = 100 \cdot (1 + 0,1)^2$$

$$M = 100 \cdot (1,1)^2$$

$$M = 100 \cdot 1,21$$

$$M = 121 \text{ mil reais.}$$

9. (Adaptado do vestibular da UniRV (GO) – 2016)

Podemos supor, sem perda de generalidade, que Márcio ganha 1000 reais por mês e após o aumento passa a receber 1080 reais. Agora, o aluguel dele que custava 180 reais passará, depois de subir 24,2%, a custar R\$ 223,56. Para calcular o percentual pedido, basta fazermos

$$\frac{223,56}{1080} = 0,207 = 20,7\%.$$

10. (Adaptado do vestibular da UEPG (PR) – 2016)

Temos como M_1 e M_2 os montantes dos capitais aplicados, que podem ser calculados como

$$M_1 = C_1 + C_1 \cdot i_1 \cdot t_1 \quad M_2 = C_2 + C_2 \cdot i_2 \cdot t_2$$

$$M_1 = 2000 + 2000 \cdot 0,01 \cdot t \quad M_2 = 1500 + 1500 \cdot 0,18 \cdot \frac{t}{12}$$

$$M_1 = 2000 + 20t \quad M_2 = 1500 + 22,5t$$

a) Sendo assim, a soma dos montantes fica

$$2000 + 20t + 1500 + 22,5t = 3840$$

$$42,5t = 3400$$

$$t = 8 \text{ meses..}$$

b) Além disso, o juro J_1 de C_1 foi de

$$J_1 = C_1 \cdot i_1 \cdot t_1$$

$$J_1 = 2000 \cdot 0,01 \cdot 8$$

$$J_1 = 160 \text{ reais.}$$

11. (Adaptado do vestibular da UniRV (GO) – 2016)

Extraindo as informações do enunciado ficaremos com

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$21600 = 15000 \cdot (1 + 0,08)^n$$

$$\frac{21600}{15000} = (1 + 0,08)^n$$

$$1,08^n = 1,44$$

$$\log 1,08^n = \log 1,44$$

$$n \cdot \log 1,08 = \log 1,44$$

$$n = \frac{\log 1,44}{\log 1,08}$$

$$n = \frac{\log \left(\frac{144}{100} \right)}{\log \left(\frac{108}{100} \right)}$$

$$n = \frac{\log 144 - \log 100}{\log 108 - \log 100}$$

$$n = \frac{\log (2^4 \cdot 3^2) - \log 100}{\log (2^2 \cdot 3^3) - \log 100}$$

$$n = \frac{4 \log 2 + 2 \log 3 - \log 100}{2 \log 2 + 3 \log 3 - \log 100}$$

$$n = \frac{4 \cdot 0,30 + 2 \cdot 0,47 - 2}{2 \cdot 0,30 + 3 \cdot 0,47 - 2}$$

$$n = \frac{0,14}{0,01}$$

$$n = 14 \text{ semestres.}$$

Por fim, serão $14 \cdot 6 = 84$ meses.

12. (Adaptado do vestibular da UniRV (GO) – 2016)

O valor de 2100 reais, com juros de 10% ao mês, aumentará para 2310 reais depois do primeiro mês. Sendo assim, ao pagar a primeira prestação P a senhora deverá $(2310 - P)$ e esse novo valor também terá juros até ser quitado pela segunda prestação P , o que pode ser escrito como

$$\begin{aligned}(2310 - P) \cdot (1 + 0,1)^1 &= P \\ (2310 - P) \cdot 1,1 &= P \\ 2541 - 1,1P &= P \\ 2,1P &= 2541 \\ P &= \frac{2541}{2,1} \\ P &= 1210 \text{ reais.}\end{aligned}$$

Assim, o valor de cada prestação a ser paga por essa senhora deverá ser de R\$ 1210,00.

13. (Adaptado do vestibular da USF (SP) – 2016)

a) Podemos calcular o montante M após 60 meses como

$$\begin{aligned}M &= C \cdot (1 + i)^{60} \\ M &= 5000 \cdot (1 + 0,005)^{60} \\ M &= 5000 \cdot (1,005)^{60} \\ M &= 5000 \cdot 1,35 \\ M &= 6750 \text{ reais}\end{aligned}$$

b) A sequência de montantes gerados por cada depósito de cem reais fica

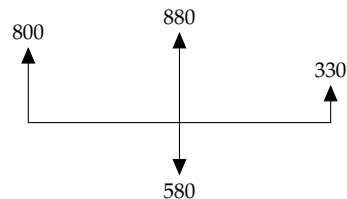
$$\left(100 \cdot (1,005)^{59}; 100 \cdot (1,005)^{58}; \dots; 100 \cdot (1,005)^1; 100\right)$$

que possui soma igual a P.G. cujo primeiro termo é 100, razão $q = 1,005$ e 60 termos. Sendo assim, ficamos com

$$\begin{aligned}S &= a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\ S &= 100 \cdot \frac{1,005^{60} - 1}{1,005 - 1} \\ S &= 100 \cdot \frac{1,35 - 1}{0,005} \\ S &= 100 \cdot \frac{0,35}{0,005} \\ S &= 100 \cdot 70 = 7000 \text{ reais.}\end{aligned}$$

14. João tomou 800 reais e a taxa de juros é de 10% = 0,1 ao mês, sendo assim, o fator de variação do saldo devedor é 1,1 a cada mês. Primeiro, recebimento de 800 reais, depois de um mês houve o aumento com o juros para $1,1 \cdot 800 = 880$. Nesse momento houve uma

amortização da dívida de 580 reais, ficando com saldo devedor de 300 reais. Por fim, mais um mês de juros e o novo valor a pagar é de $1,1 \cdot 300 = 330$. O que encerra a dívida. A ilustração abaixo expõe o fluxo do saldo de devedor e do pagamento efetuado com o passar do tempo.



O último pagamento foi de 330 reais.

15. (Adaptado do vestibular da FGV – 2016)

Seja x o valor aplicado, então

- o fundo A ficou com $0,75x$ a uma taxa i ; e
- o fundo B teve $0,25x$ a uma taxa $i + 0,2i$; e

Sendo assim, podemos fazer

$$\begin{aligned}0,75x \cdot i + 0,25x \cdot (i + 0,2i) &= 26250 \\ 0,75x \cdot i + 0,25x \cdot (1,2i) &= 26250 \\ 0,75xi + 0,3xi &= 26250 \\ 1,05xi &= 26250 \\ xi &= \frac{26250}{1,05} \\ xi &= 25000.\end{aligned}$$

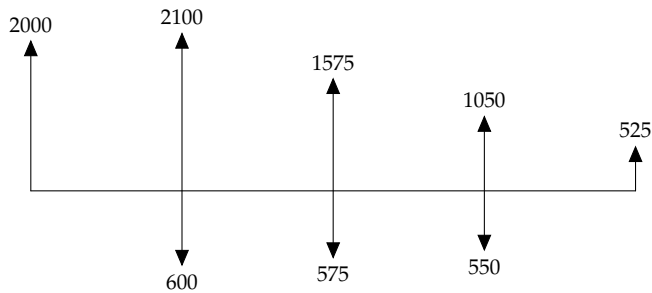
Se o valor fosse aplicado todo em A teríamos como rendimento xi que já sabemos que vale R\$ 25000,00.

16. Maria tomou 2000 reais e a taxa de juros é de 5% = 0,05 ao mês, sendo assim, o fator de variação mensal do saldo devedor é 1,05. De início, 2000 reais, depois de um mês, gera um aumento para $1,05 \cdot 2000 = 2100$ na dívida. Nesse momento houve a amortização de 600 reais, ficando com saldo devedor de 1500 reais.

Daí, o mês passou e houve incidência de juros o que elevou a dívida para $1,05 \cdot 1500 = 1575$, houve outra amortização, agora de 575 reais, com saldo devedor em 1000 reais.

Na sequência, mais um mês, mais juros e a dívida vai para $1,05 \cdot 1000 = 1050$ reais, outra amortização, 550 reais e saldo 500 reais.

Por fim, dívida em $1,05 \cdot 500 = 525$ reais, o que encerra a dívida após o último pagamento. A figura abaixo sugere o fluxo de juros e amortizações até o fim da dívida.



O último pagamento foi de 525 reais.

17. (Adaptado do vestibular da ESPM (SP) – 2016)

O montante será a soma dos capitais aplicados nos respectivos períodos, o que resultará em

$$\begin{aligned}
 1000 \cdot (1 + 0,1)^3 + 1000 \cdot (1 + 0,1)^2 + 1000 \cdot (1 + 0,1)^1 &= \\
 1000 \cdot (1,1)^3 + 1000 \cdot (1,1)^2 + 1000 \cdot (1,1)^1 &= \\
 1000 \cdot 1,331 + 1000 \cdot 1,21 + 1000 \cdot 1,1 &= \\
 1331 + 1210 + 1100 &= \\
 &= 3641 \text{ reais.}
 \end{aligned}$$

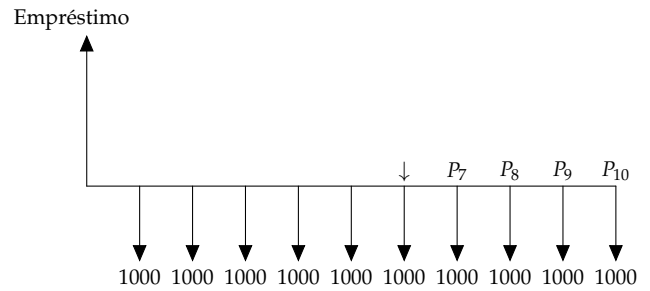
18. (Adaptado do ENEM – 2016)

Analisando a situação de modo financeiro, a temperatura M após n intervalos de trinta minutos, a uma taxa $i = -0,01$, fica

$$\begin{aligned}
 M &= 3000 \cdot (1 - 0,01)^n \\
 30 &= 3000 \cdot (1 - 0,01)^n \\
 \frac{1}{100} &= 0,99^n \\
 \log \left(\frac{99}{100} \right)^n &= \log \left(\frac{1}{100} \right) \\
 n &= \frac{\log 1 - \log 100}{\log 99 - \log 100} \\
 n &= \frac{0 - 2}{\log(3^2 \cdot 11) - 2} \\
 n &= \frac{-2}{2 \log 3 + \log 11 - 2} \\
 n &= \frac{-2}{2 \cdot 0,477 + 1,041 - 2} \\
 n &= \frac{-2}{2 \cdot 0,477 + 1,041 - 2} \\
 n &= \frac{-2}{-0,005} \\
 n &= 400 \text{ períodos de meia hora, ou} \\
 n &= 200 \text{ horas.}
 \end{aligned}$$

19. (Adaptado do vestibular da USP – 2015)

A sequência de pagamentos pode ser ilustrada como



Observe que, no sexto mês, ele irá antecipar os pagamentos P_7 , P_8 , P_9 e P_{10} , o que pode ser calculado como

$$\begin{aligned}
 P_7 + P_8 + P_9 + P_{10} &= \\
 \frac{1000}{1,04} + \frac{1000}{1,04^2} + \frac{1000}{1,04^3} + \frac{1000}{1,04^4} &= \\
 \frac{1000}{1,04^4} \frac{1,04^4 - 1}{1,04 - 1} &= \\
 \frac{1000}{1,17} \frac{1,17 - 1}{0,04} &= \\
 \frac{1000}{1,17} \frac{0,17}{0,04} &\cong 3632,48 \text{ reais.}
 \end{aligned}$$

ELABORADO POR TIAGO MIRANDA E CLEBER ASSIS
 PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
 CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM