

Módulo Divisibilidade

Conjunto e Quantidade de Divisores

6° ano E.F.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda



Divisibilidade
Conjunto e Quantidade de Divisores

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine o conjunto dos divisores naturais de:

- a) 12.
- b) 24.
- c) 30.

Exercício 2. Qual a quantidade de divisores de:

- a) 60?.
- b) 121?.
- c) 120?.

Exercício 3. A forma fatorada de um número é $2^3 \cdot 3^2 \cdot 11^2$. Quantos divisores tem este número?

Exercício 4. Uma professora leva para a sala de aula uma caixa com 24 bombons. Ela quer distribuir estes bombons de maneira que cada aluno receba a mesma quantidade de bombons e também que não sobre nem um bombom com ela. Quantas são as possíveis quantidades de alunos em sala para que isso aconteça?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. No quadro abaixo, qual dos números tem a maior quantidade de divisores?

20	30	40	50
----	----	----	----

Exercício 6. Após a fatoração de um número N , calculou-se a sua quantidade de divisores, concluindo-se que N é um quadrado perfeito. Assinale a alternativa que contenha uma possível quantidade de divisores de N .

- a) 2.
- b) 4.
- c) 5.
- d) 8.
- e) 12.

Exercício 7. Faça a fatoração de 360 e determine seu conjunto de divisores.

Exercício 8. Fatorando 270, obtemos $2 \cdot 3^3 \cdot 5$. Complete o quadro abaixo, no qual as três primeiras colunas indicam os fatores primos e a última coluna o divisor de 270, para mostrar todos os seus divisores.

2^0	3^0	5^0	1
2^0	3^0	5^1	5
2^0	3^1	5^0	3
2^0	3^1	5^1	15
2^0	3^2	5^0	9
2^0	3^2	5^1	45
2^0	3^3	5^0	27
	3^3	5^1	135
2^1	3^0	5^0	
2^1	3^0		10
2^1		5^0	6
2^1	3^1	5^1	
	3^2		18
2^1	3^2		90
2^1			54
2^1	3^3		270

Exercício 9. Determine a quantidade de divisores de $12^5 \cdot 45^7$.

Exercício 10. Um determinado número A tem 48 divisores e apenas 3 fatores primos. Se o fator primo a tem expoente 1, em sua forma decomposta, e o fator primo b tem expoente 3, em sua forma decomposta, determine o expoente do fator primo c .

Exercício 11. Se $N = 2^3 \cdot 3^a \cdot 7^2$, determine o valor de a , sabendo que N possui 48 divisores naturais.

- a) 1.
- b) 2.
- c) 3.
- d) 4.
- e) 5.

Exercício 12. O número $14a$, sendo a um algarismo, possui exatamente 15 divisores. Determine o valor de a .

Exercício 13. Complete os parênteses na fatoração abaixo e determine a quantidade de divisores de N .

N	2
(---)	2
(---)	2
(---)	2
75	(---)
(---)	(---)
(---)	(---)
1	

- c) 10.
- d) 120.
- e) 30.

Exercício 14. Quantos números entre 100 e 110 têm exatamente 4 divisores naturais?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Qual o número de 2 algarismos que possui a maior quantidade de divisores?

Exercício 16. Se o número 741^n tem aba divisores, sendo a e b algarismos. Calcule b^a .

Exercício 17. Determine quantos números menores que 100 possuem exatamente 8 divisores.

Exercício 18. Determine a quantidade de divisores do número $2^{16} - 1$.

Exercício 19. Um concurso oferece um prêmio para cada pergunta respondida corretamente. São 10 perguntas, sendo que, dos 10 prêmios, são 3 bombons iguais, 4 chocolates iguais e 3 pirulitos iguais. De quantas maneiras diferentes um candidato deste concurso poderá ser premiado?

- a) 50.
- b) 80.
- c) 120.
- d) 132.
- e) 180.

Exercício 20. Sobre uma mesa existem 3 pilhas de moedas: a primeira pilha possui 5 moedas amarelas com o número 2 em suas faces; a segunda possui 3 moedas verdes com o número 3; e a última pilha possui 2 moedas azuis com o número 7. Uma pessoa deve escolher qualquer quantidade de moedas da mesa e multiplicar os números de suas faces. Quantos números diferentes podem ser formados?

- a) 71.
- b) 70.

Respostas e Soluções.

1.

- a) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
 b) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.
 c) $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

2.

- a) como $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, sua quantidade de divisores é $(2+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 12$.
 b) como $121 = 11^2$, sua quantidade de divisores é $(2+1) = 3$.
 c) como $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, sua quantidade de divisores é $(3+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 16$.

3. $(3+1) \cdot (2+1) \cdot (2+1) = 36$.

4. A quantidade de alunos deve ser um número divisor de 24, ou seja, $(3+1) \cdot (1+1) = 8$.

5. Temos que:

- i. como $20 = 2^2 \cdot 5$, então são $(2+1) \cdot (1+1) = 6$ divisores;
 ii. como $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, então são $(1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 8$ divisores;
 iii. como $40 = 2^3 \cdot 5$, então são $(3+1) \cdot (1+1) = 8$ divisores;
 iv. como $50 = 2 \cdot 5^2$, então são $(1+1) \cdot (2+1) = 6$ divisores.

Portanto, os números do quadro que possuem mais divisores são 30 e 40.

6. Um quadrado perfeito apresenta quantidade ímpar de divisores. Resposta C.

7.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	
	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Como $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, então os divisores de 360 são do tipo $2^n \cdot 3^m \cdot 5^p$, sendo $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, $m \in \{0, 1, 2\}$ e $p \in \{0, 1\}$.

Por fim, vamos usar uma tabela com todas as combinações de n, m, p e os respectivos valores dos divisores de 360.

n	m	p	divisor
0	0	0	1
0	0	1	5
0	1	0	3
0	1	1	15
0	2	0	9
0	2	1	45
1	0	0	2
1	0	1	10
1	1	0	6
1	1	1	30
1	2	0	18
1	2	1	90
2	0	0	4
2	0	1	20
2	1	0	12
2	1	1	60
2	2	0	36
2	2	1	180
3	0	0	8
3	0	1	40
3	1	0	24
3	1	1	120
3	2	0	72
3	2	1	360

8.

2^0	3^0	5^0	1
2^0	3^0	5^1	5
2^0	3^1	5^0	3
2^0	3^1	5^1	15
2^0	3^2	5^0	9
2^0	3^2	5^1	45
2^0	3^3	5^0	27
2^0	3^3	5^1	135
2^1	3^0	5^0	2
2^1	3^0	5^1	10
2^1	3^1	5^0	6
2^1	3^1	5^1	30
2^1	3^2	5^0	18
2^1	3^2	5^1	90
2^1	3^3	5^0	54
2^1	3^3	5^1	270

9. (Extraído da Vídeo Aula) Temos que:

$$\begin{aligned}
 12^5 \cdot 45^7 &= \\
 (3 \cdot 2^2)^5 \cdot (3^2 \cdot 5)^7 &= \\
 3^5 \cdot 2^{10} \cdot 3^{14} \cdot 5^7 &= \\
 2^{10} \cdot 3^{19} \cdot 5^7. &
 \end{aligned}$$

Como os expoentes dos fatores primos são 10, 19 e 7, a quantidade de divisores é $(10 + 1) \cdot (19 + 1) \cdot (7 + 1) = 1760$.

10. Como dois dos três divisores são 1 e 3 e $(1 + 1) \cdot (3 + 1) = 8$, para que a quantidade de divisores seja 48, o expoente do fator c deve ser 5, pois $(1 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot (5 + 1) = 48$.

11. Temos $(3 + 1) \cdot (a + 1) \cdot (2 + 1) = 48$, segue que $a = 3$. Resposta C.

12. Se a quantidade de divisores é ímpar, então este número deve ser um quadrado perfeito. Como entre 140 e 149 existe apenas 144 que é quadrado perfeito, temos $a = 4$. Podemos verificar que $144 = 2^4 \cdot 3^2$, que realmente possui 15 divisores.

13.

N	2
600	2
300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	
$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$	

Como $N = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, então a quantidade de divisores de N é $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$.

14. Para que um número tenha exatamente 4 divisores, ele deve ser resultado do produto de dois números primos, já que 1 e o próprio número já são divisores. Temos então que $2 \cdot 53 = 106$ é o único número entre 100 e 110 com exatamente 4 divisores.

15. Vamos analisar o número de 2 algarismos que possui a maior quantidade de fatores primos diferentes. Como $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 > 99$, então este número possui no máximo 3 fatores primos diferentes, que poderia ser $2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$, por exemplo, porém não poderíamos multiplicá-lo por nenhum primo que o resultado seria maior que 99. Vamos tomar as únicas possibilidades com três fatores primos que nos permitirão acrescentar uma quantidade maior de novos primos, ou seja, $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, o qual podemos multiplicá-lo por 2 ou por 3, onde obteríamos 60 e 90, respectivamente, cada um deles com $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ divisores; e $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$, donde podemos multiplicá-lo por 2, obtendo 84, que possui 12 divisores. Com dois fatores primos, para que um número possua 12 divisores, ele deve ser da forma $p^x q^y$ com $\{x, y\} \in \{\{5, 1\}, \{3, 2\}\}$. Dessas possibilidades, apenas $2^5 \cdot 3^1 = 96$ possui dois dígitos. Como $2^{11} > 100$, não existe exemplo com apenas um fator primo. Portanto, os números de 2 algarismos com a maior quantidade de divisores são 60, 84, 90 e 96.

16. (Extraído da Vídeo Aula) Temos que $741 = 3 \cdot 13 \cdot 19$. Como são 3 divisores primos, o número total de divisores é $(n + 1) \cdot (n + 1) \cdot (n + 1)$. Vamos analisar a tabela para diversos valores de n :

Valor de n	número de divisores
1	8
2	27
3	64
4	125
5	216
6	343
7	512
8	729
9	1000

Vemos que a partir de $n = 9$, temos uma quantidade de divisores com mais de 3 algarismos, sendo que a quantidade de algarismos deve ser da forma aba . O único valor que atende o fato do algarismo da unidade ser igual ao algarismo da centena no número que representa a quantidade de divisores é 343, para $n = 6$. Assim, $b^a = 4^3 = 64$.

17. Não pode haver número cuja fatoração seja formada por apenas um primo, pois seriam maiores que 100, já que o menor deles é $2^7 = 128$. Então, para que um número possua exatamente 8 divisores, sua forma decomposta deve ter um primo com expoente 1 e outro primo com expoente 3; ou três primos, todos com expoente 1. Vamos usar uma tabela para listar todas as possibilidades.

Número fatorado	Resultado
$2 \cdot 3 \cdot 5$	30
$2 \cdot 3 \cdot 7$	42
$2 \cdot 3 \cdot 11$	66
$2 \cdot 3 \cdot 13$	78
$2 \cdot 5 \cdot 7$	70
$2^3 \cdot 3$	24
$2^3 \cdot 5$	40
$2^3 \cdot 7$	56
$2^3 \cdot 11$	88
$2 \cdot 3^3$	54

Temos, portanto, 10 números menores que 100 que possuem exatamente 8 divisores.

18. Temos que:

$$\begin{aligned}
 2^{16} - 1 &= \\
 (2^8 + 1) \cdot (2^8 - 1) &= \\
 (2^8 + 1) \cdot (2^4 + 1) \cdot (2^4 - 1) &= \\
 (2^8 + 1) \cdot (2^4 + 1) \cdot (2^2 + 1) \cdot (2^2 - 1) &= \\
 257 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 3. &
 \end{aligned}$$

Como o produto é composto por 4 números primos, $2^{16} - 1$ possui $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ divisores.

19. Resolver este problema é o mesmo que calcular a quantidade de divisores do número $b^3 \cdot c^4 \cdot p^3$, sendo b , c e p números primos, ou seja, $(3 + 1) \cdot (4 + 1) \cdot (3 + 1) = 80$. Resposta B.

20. Como são 5 com o número 2, 3 com o número 3 e 2 com o número 7, basta calcularmos a quantidade de divisores do número $2^5 \cdot 3^3 \cdot 7^2$, excluindo o 1, ou seja, são $(5 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot (2 + 1) - 1 = 71$ divisores. Resposta A.

ELABORADO POR CLEBER ASSIS E TIAGO MIRANDA
 PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
 CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM