Inequações Produto e Quociente do Segundo Grau

Introdução às Inequações do Segundo Grau

1° ano E.M.

Material elaborado por Lorena Carvalho Bulhosa

Inequações Produto e Quociente do Segundo Grau
Introdução às Inequações do Segundo Grau

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine os valores reais de x para os quais $x^2 - 6x + 8 > 0$.

Exercício 2. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $-5t^2 + 20t \geq 15$.

Exercício 3. Para quais valores reais de x temos $-x^2 - 2 < -2x$?

Exercício 4. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $4x(x-1) > -1$.

Exercício 5. Determine quais valores de x fazem parte do conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}; \frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} < 0\}$.

Exercício 6. Para quais valores reais de x o trinômio $-4x^2 + 2x - 1/4$ é não negativo?

Exercício 7. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $(x-3)^2 < 5$.

Exercício 8. Determine o maior domínio D possível para a função $f(x) = \sqrt{x/3 - x^2}$.

Exercício 9. Mostre que a soma de três números naturais (não considere o zero) consecutivos é menor ou igual ao produto dos dois maiores.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 10. Resolva a inequação em $\mathbb{R}$.

$$(x-1)(x+1) + 2(x+2) \leq 2(2x+1)$$

Exercício 11. Para quais valores reais de x é válida a inequação $\sqrt{2x-8} + 8 < x$?

Exercício 12. Dada a constante $m \in \mathbb{R}$, para quais valores reais de n vale a inequação $n^2 - 2n + m > 0$?

Exercício 13. Considere a inequação $ax^2 + bx + c > 0$, onde $a > 0$. Mostre que se o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, então a inequação é válida para todo x real.

Exercício 14. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \geq 0$. Mostre a desigualdade entre as médias aritmética e quadrática: $\frac{x+y}{2} < \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$.

Exercício 15. Para todo n inteiro e positivo, mostre que $\sqrt{4n+1} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$.

Exercício 16. Um grupo de cinco jovens empreendedoras resolveu expandir sua produção de biquínis. Seus custos mensais são de $R\$500$ com publicidade e $R\$20$ para a produção de cada peça. Elas esperam que as vendas sigam a "curva de demanda"(n de peças vendidas no mês) $n = 800 - 2p$, onde p é o preço de cada peça. Por exemplo, se um biquíni custa $R\$400$ elas não vendem nenhum deles. Se custa $R\$200$ elas conseguem vender $800 - 2 * 200 = 400$ peças. Se cada uma delas quer lucrar pelo menos $R\$5000$ por mês, qual o valor mínimo de cada peça?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 17. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $x^4 - 10x^2 + 9 \geq 0$.

Exercício 18. Determine $m \in \mathbb{R}$ para que se tenha $x^2 + (2m-3)x + m^2 - 1 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 19. Determine $m \in \mathbb{R}$ para que se tenha $mx^2 + 8x < 6 - m$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 20. Determine $m \in \mathbb{R}$ para os quais o domínio da função $f(x) = \sqrt{(m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3}$ é o conjunto dos números reais.

Exercício 21. Para quais valores reais de m a inequação $x^2 - (m-3)x + m > 0$ é válida para todo $x \in [1, 2]$?

Exercício 22. Mostre que $2x^2 + 5y^2 \geq 4xy$.

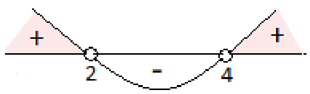
Exercício 23. Mostre que para $x, y, z \in \mathbb{R}$ vale a inequação $x^2 + y^2 + z^2 + 4 > 2(x + y + z)$.

Exercício 24. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, mostre que $(a+b+c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$.

Respostas e Soluções.

1. Defina $f(x) = x^2 - 6x + 8$. As raízes de f têm soma 6 e produto 8, logo são 2 e 4. Temos $a = 1 > 0$, logo

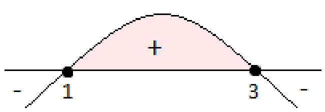
$$\begin{cases} f(x) < 0 & para \quad 2 < x < 4 \\ f(x) = 0 & para \quad x = 2 \quad ou \quad x = 4 \\ f(x) > 0 & para \quad x < 2 \quad ou \quad x > 4. \end{cases}$$



Como a inequação é $f(x) > 0$, o conjunto-solução é $S = \{x \in \mathbb{R}; x < 2 \quad ou \quad x > 4\}$.

2. Para facilitar as contas dividimos toda a inequação por 5 e definimos $f(t) = -t^2 + 4t - 3$. Temos $a = -1 < 0$, $\Delta = 4 > 0$ e raízes $t_1 = 1$ e $t_2 = 3$, então

$$\begin{cases} f(t) < 0 & para \quad x < 1 \quad ou \quad x > 3 \\ f(t) = 0 & para \quad x = 1 \quad ou \quad x = 3 \\ f(t) > 0 & para \quad 1 < x < 3. \end{cases}$$

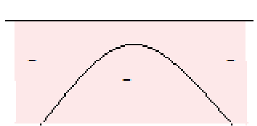


Como a inequação é $f(t) \geq 0$, o conjunto-solução é $S = \{t \in \mathbb{R}; 1 \leq t \leq 3\}$.

3. Podemos completar quadrados fazendo

$$-x^2 + 2x - 2 = -(x^2 - 2x + 1 + 1) = -(x-1)^2 - 1 < 0$$

para todo x, ou definindo $f(x) = -x^2 + 2x - 2$, temos $a = -1 < 0$, $\Delta = -4 < 0$, logo $f(x) < 0$ para todo x real.

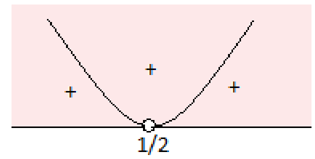


Assim, a inequação é válida para todo x real.

4. Definindo $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$, $a = 4 > 0$, $\Delta = 0$ e a raíz dupla é $x = 1/2$, então

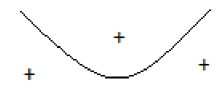
$$\begin{cases} f(x) = 0 & para \quad x = 1/2 \\ f(x) > 0 & para \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}. \end{cases}$$

Como a inequação é $f(x) > 0$, o conjunto-solução é $S = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$.



De outra maneira, temos $4x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow 4(x^2 - x + 1/4) > 0 \Leftrightarrow 4(x - 1/2)^2 > 0$, que é válido para todo $x \neq 1/2$, onde o valor é nulo.

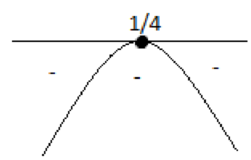
5. Multiplicando a inequação por 12 para facilitar as contas e definindo $f(x) = 4x^2 - 6x + 3$, temos $a = 4 > 0$ e $\Delta = -12 < 0$, logo $f(x) > 0$ para todo x. Segue que $A = \emptyset$.



6. Definindo $f(x) = -4x^2 + 2x - 1/4$, temos $a = -4 < 0$, $\Delta = 0$ e a raiz dupla $x = 1/4$. Logo

$$\begin{cases} f(x) = 0 & para \quad x = 1/4 \\ f(x) < 0 & para \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1/4\}. \end{cases}$$

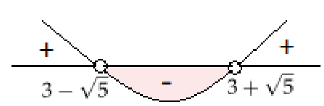
Como a inequação é $f(x) \geq 0$, o conjunto-solução é o unitário $S = \{1/4\}$.



De outra maneira, temos $-4x^2 + 2x - 1/4 = -(2x - 1/2)^2 \leq 0$. Logo, só pode ser não negativo sendo igual a zero. Assim, $x = 1/4$.

7. $(x-3)^2 < 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 < 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 4 < 0$. Definindo $f(x) = x^2 - 6x + 4$, temos $a = 1 > 0$, $\Delta = 20 > 0$ e suas raízes são $3 - \sqrt{5}$ e $3 + \sqrt{5}$. Logo

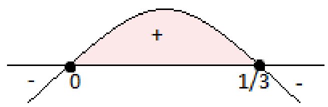
$$\begin{cases} f(x) < 0 & para \quad 3 - \sqrt{5} < x < 3 + \sqrt{5} \\ f(x) = 0 & para \quad x = 3 - \sqrt{5} \quad ou \quad x = 3 + \sqrt{5} \\ f(x) > 0 & para \quad x < 3 - \sqrt{5} \quad ou \quad x > 3 - \sqrt{5}. \end{cases}$$



Como a inequação é $f(x) < 0$, o conjunto-solução é $S = \{x \in \mathbb{R}; 3 - \sqrt{5} < x < 3 + \sqrt{5}\}$.

8. Para f estar bem definida devemos ter $x/3 - x^2 \geq 0$. Definindo $g(x) = x/3 - x^2 = x(1/3 - x)$, temos $a = -1 < 0$ e raízes $x = 0$ e $x = 1/3$. Então

$$\begin{cases} g(x) < 0 & para \quad x < 0 \quad ou \quad x > 1/3 \\ g(x) = 0 & para \quad x = 0 \quad ou \quad x = 1/3 \\ g(x) > 0 & para \quad 0 < x < 1/3. \end{cases}$$

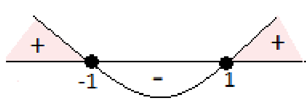


Como o desejado é $g(x) \geq 0$, o maior domínio possível é $D = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1/3\}$.

9. Denote os números por x, $x+1$ e $x+2$. Temos

$$\begin{aligned} & x + (x+1) + (x+2) \leq (x+1)(x+2) \\ \Leftrightarrow & 3x + 3 \leq (x+1)(x+2) \\ \Leftrightarrow & 3(x+1) \leq (x+1)(x+2) \\ \Leftrightarrow & (x+1)(x+2-3) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) \geq 0. \end{aligned}$$

Aqui, podemos usar os métodos para resolver inequações-produto. Mas, vamos definir $f(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$, para $x \in \mathbb{R}$, e analisar o sinal de f.



Temos $f(x) \geq 0$ para $\{x \in \mathbb{R}; x \leq -1 \quad ou \quad x \geq 1\}$. Como a inequação vale para todo $x \geq 1$, real, em particular, vale para todo natural.

10.

$$\begin{aligned} & (x-1)(x+1) + 2(x+2) \leq 2(2x+1) \\ \Leftrightarrow & x^2 - 1 + 2x + 4 - 4x - 2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 2x + 1 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & x = 1, \end{aligned}$$

já que $(x-1)^2 \geq 0$ para todo x e $(x-1)^2 = 0$ apenas se $x - 1 = 0$. Assim $S = \{1\}$.

11. Reescreva como $\sqrt{2x-8} < x - 8$. Para a raiz estar bem definida devemos ter $2x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x > 4$. Para a raiz não ser negativa devemos ter $x - 8 > 0 \Leftrightarrow x > 8$. Aqui, $x > 8$.

$$\sqrt{2x-8} < x - 8 \Leftrightarrow 2x - 8 < (x-8)^2 \Leftrightarrow x^2 - 18x + 72 > 0.$$

Defina $f(x) = x^2 - 18x + 72$. A função f é positiva para $x < 6$ ou $x > 12$. Como temos $x > 8$, então devemos ter $x > 12$. Assim, a inequação é válida para x real, $x > 12$.

12. Considere a função $f(n) = n^2 - 2n + m$. Como $a = 1 > 0$, seu gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima. Calculando o discriminante temos $\Delta = 4 - 4m$. Temos três situações possíveis:

$\Delta < 0$. Isto acontece para $m > 1$. Nesse caso o gráfico de f não toca o eixo das abscissas e a função é positiva para todo valor de n.

$\Delta = 0$. Isto acontece para $m = 1$. Nesse caso o gráfico de f toca o eixo das abscissas apenas no vértice da parábola ($n_v = -b/2a = 2/2 = 1$) e, portanto, é positiva para $n \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$.

$\Delta > 0$. Isto acontece para $m < 1$. Nesse caso, o gráfico de f toca o eixo das abscissas em dois pontos n_1 e n_2, e a função é positiva para $n \in (-\infty, n_1) \cup (n_2, +\infty)$. Os valores de n_1 e n_2 são $n_1 = (2 - \sqrt{4-4m})/2 = 1 - 2\sqrt{1-m}$ e $n_2 = 1 + 2\sqrt{1-m}$.

Resumindo, se $m > 1$, o conjunto solução é $S = \mathbb{R}$, se $m = 1$, $S = \mathbb{R} \backslash \{1\}$ e, se $m > 1$, $S = (-\infty, 1 - 2\sqrt{1-m}) \cup (1 + 2\sqrt{1-m}, +\infty)$.

13. Podemos escrever $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) > 0$. Para a inequação ser válida, basta que $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} > 0$, já que $a > 0$. Completando quadrados

$$\begin{aligned} & x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} > 0 \\ \Leftrightarrow & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) > 0 \\ \Leftrightarrow & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0, \end{aligned}$$

a qual é válida para todo x, já que $\Delta < 0$.

14. Como os dois lados da desigualdade são não negativos

$$\begin{aligned} & \frac{(x+y)^2}{4} < \frac{x^2 + y^2}{2} \\ \Leftrightarrow & (x+y)^2 < 2(x^2 + y^2) \\ \Leftrightarrow & x^2 + 2xy + y^2 < 2x^2 + 2y^2 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 2xy + y^2 > 0 \\ \Leftrightarrow & (x-y)^2 > 0, \end{aligned}$$

a qual é válida para qualquer x, y reais.

15. Vamos mostrar as duas inequações separadamente. Usando que se $x, y \geq 0$ e $x < y$, então $x^2 < y^2$, da primeira inequação:

$$\begin{aligned} & \sqrt{4n+1} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \\ \Leftrightarrow & 4n + 1 < n + 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} + n + 1 \\ \Leftrightarrow & 2n < 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} \\ \Leftrightarrow & n < \sqrt{n}\sqrt{n+1} \\ \Leftrightarrow & n^2 < n(n+1) \\ \Leftrightarrow & n^2 < n^2 + n \\ \Leftrightarrow & 0 < n, \end{aligned}$$

que é válido pois n é positivo.
Da segunda inequação:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}\\
\Leftrightarrow & n+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+n+1<4n+2\\
\Leftrightarrow & 2\sqrt{n}\sqrt{n+1}<2n+1\\
\Leftrightarrow & 4n(n+1)<4n^2+4n+1\\
\Leftrightarrow & 4n^2+4n<4n^2+4n+1\\
\Leftrightarrow & 0<1,
\end{aligned}$$

que é sempre válido.

16.

$$\begin{aligned}
&Custo = 500+20n = 500+20(800-2p) = 16500-40p\\
&Receita = np = (800-2p)p = 800p-2p^2\\
&Lucro = Receita - Custo = -2p^2+840p-16500
\end{aligned}$$

Como queremos que cada uma tenha pelo menos $R\$5000$ de lucro, elas precisam que o lucro total seja de pelo menos $R\$25000$. Assim, temos que resolver a inequação

$$-2p^2+840p-16500 \geq 25000,$$

que equivale a resolver

$$-p^2+420p-20750 \geq 0.$$

A função $f(p) = -p^2+420p-20750$ é não negativa em $[p_1, p_2]$, onde p_1 e p_2 são suas raízes. Portanto, o menor preço procurado é o valor de p_1 (se não negativo). Calculando $p_1 = \frac{-420+\sqrt{93400}}{-2} \approx 57,19 > 0$. Concluímos que elas devem vender cada peça por pelo menos $R\$57,19$.

17. Fazendo $z = x^2$, temos

$$z^2-10z+9 \geq 0 \Rightarrow z \leq 1 \quad ou \quad z \geq 9;$$

mas $z = x^2$, logo

$$\begin{aligned}
&(x^2 \leq 1 \quad ou \quad x^2 \geq 9) \Leftrightarrow (x^2-1 \leq 0 \quad ou \quad x^2-9 \geq 0) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (-1 \leq x \leq 1 \quad ou \quad x \leq -3 \quad ou \quad x \geq 3).
\end{aligned}$$

Logo $S = \{x \in \mathbb{R}; x \leq -3 \quad ou -1 \leq x \leq 1 \quad ou \quad x \geq 3\}$.

18. Para $f(x) = x^2+(2m-3)x+m^2-1$ ser não negativa para todo x, devemos ter $a > 0$ e $\Delta \leq 0$. Se $\Delta < 0$, $f(x) > 0$ para todo x. Se $\Delta = 0$, $f(x) > 0$ para todo x diferente do x do vértice da parábola, onde $f(x) = 0$.

$$a = 1 > 0 \text{ para qualquer valor de } m;$$

$$\begin{aligned}
&\Delta = (2m-3)^2-4.1.(m^2-1) \leq 0 \Leftrightarrow -12m+13 \leq 0\\
&\quad \Leftrightarrow m \geq 13/12.
\end{aligned}$$

Logo, devemos ter $m \geq 13/12$.

19. Considere $f(x) = mx^2+8x+m-6$. Para $f(x)$ ser negativa para todo x devemos ter $a < 0$ e $\Delta < 0$.

$$a = m < 0;$$

$$\begin{aligned}
&\Delta = 64-4m(m-6) < 0 \Leftrightarrow -m^2+6m+16 < 0\\
&\quad \Leftrightarrow m < -2 \quad ou \quad m > 8.
\end{aligned}$$

Das duas condições concluímos que $m < -2$.

20. Considerando $g(x) = (m-2)x^2-2mx+2m-3$, para que o domínio da função f seja $\mathbb{R}$, devemos ter $g(x) \geq 0$ para todo valor de x. Então, para a função g, devemos ter $a > 0$ e $\Delta \leq 0$, portanto

$$a = m-2 > 0 \Leftrightarrow m > 2;$$

$$\begin{aligned}
&\Delta = (-2m)^2-4(m-2)(2m-3) \leq 0\\
&\quad \Leftrightarrow -m^2+7m-6 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 1 \quad ou \quad m \geq 6.
\end{aligned}$$

Das duas condições concluímos que $m \geq 6$.

21. Solução 1. Seja $f(x) = x^2-(m-3)x+m$. Como $a = 1 > 0$, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima e intersecta o eixo x em $0, 1$ ou 2 pontos a depender do sinal de Δ.

$$\Delta = (m-3)^2-4m = m^2-10m+9$$

Temos três casos:

1) Se $\Delta < 0$, $f(x) > 0$ para todo x real, em particular para $x \in [1, 2]$. $\Delta < 0$ se $1 < m < 9$.

2) Se $\Delta = 0$, $f(x) > 0$ para todo x diferente do $x_v = -b/2a = (m-3)/2$. Então, basta que $x_v \notin [1, 2]$. Temos $\Delta = 0$ se $m = 1$ ou $m = 9$. Se $m = 1$, $x_v = -1$ e se $m = 9$, $x_v = 3$. Logo, $x_v \notin [1, 2]$ para esses valores de m.

3) Se $\Delta > 0$, $f(x) > 0$ em $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, onde x_1 e x_2 são raízes de $f(x)$. Assim, devemos ter $[1, 2] \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, o que acontece se $2 < x_1$ ou $x_2 < 1$. $\Delta > 0$ se $m < 1$ ou $m > 9$.

- Se $2 < x_1$

  $$\begin{aligned}
  &2 < x_1 \Leftrightarrow 2 < \frac{m-3-\sqrt{m^2-10m+9}}{2}\\
  &\quad \Leftrightarrow \sqrt{m^2-10m+9} < m-7
  \end{aligned}$$

  Se $m < 1$, $m-7 < 0 \Rightarrow \sqrt{m^2-10m+9} < 0$, o que não é válido. Suponha $m > 9$. Como a desigualdade se conserva com o quadrado dos termos, temos $m^2-10m+9 < m^2-14m+49 \Leftrightarrow m < 10$. Aqui, $9 < m < 10$.

- Se $x_2 < 1$

  $$\begin{aligned}
  &x_2 < 1 \Leftrightarrow \frac{m-3+\sqrt{m^2-10m+9}}{2} < 1\\
  &\quad \Leftrightarrow \sqrt{m^2-10m+9} < 5-m
  \end{aligned}$$

  Procedendo de maneira análoga, temos aqui $m < 1$.

Unindo todas as opções possíveis: $(1, 9) \cup \{1, 9\} \cup (9, 10) \cup (-\infty, 1) = (-\infty, 10)$.

21. Solução 2. Seja $f(x) = x^2 - (m-3)x + m$. O gráfico de f é uma parábola com concavidade voltada para cima, já que $a = 1 > 0$. A questão nos pede os valores de m tais que o pedaço da parábola referente ao intervalo $[1,2]$ esteja acima do eixo x. Sabemos que f atinge seu valor mínimo no vértice $x_v = (m-3)/2$. Vamos considerar três casos:

1) $x_v \in [1,2] \Leftrightarrow 5 \le m \le 7$. Como todo o gráfico está acima do vértice, basta que $f(x_v) > 0$. Isto acontece se $4m > (m-3)^2$, de onde obtemos $1 < m < 9$. Das duas condições temos $m \in [5,7]$.

2) $x_v < 1 \Leftrightarrow m < 5$. Como o x_v está à esquerda do intervalo de interesse, a função será crescente nele, então basta que seja positiva em $x = 1$. $f(1) = 1 - m + 3 + m = 4 > 0$, para qualquer valor de m. Aqui, basta $m \in (-\infty, 5)$.

3) $2 < x_v \Leftrightarrow m > 7$. Como o x_v está à direita do intervalo de interesse, a função será decrescente nele, então basta que seja positiva em $x = 2$. $f(2) > 0 \Leftrightarrow m < 10$. Das duas condições $m \in (7, 10)$.

Unindo todos os valores de m para os quais $f > 0$, temos $[5,7] \cup (-\infty,5) \cup (7,10) = (-\infty, 10)$.

22. Vamos completar quadrados. Para facilitar as contas multiplique a equação por 2, obtendo

$$\begin{aligned}
&4x^2 - 8xy + 10y^2 \ge 0\\
\Leftrightarrow &(2x)^2 - 2.2x.2y + (2y)^2 + 6y^2 \ge 0\\
\Leftrightarrow &(2x-2y)^2 + 6y^2 \ge 0.
\end{aligned}$$

Outra solução: Se $y = 0$, a inequação é óbvia. Supondo $y \neq 0$, dividindo a inequação por y^2 e denotando $z = x/y$, temos $2z^2 - 4z + 5 \ge 0$. Esta inequação tem $a = 2 > 0$ e $\Delta < 0$, logo é válida para todo $z \in \mathbb{R}$. E, por sua vez, a anterior é válida para todo (x, y) com $y \neq 0$.

23. A inequação equivale a $(x^2 - 2x) + (y^2 - 2y) + (z^2 - 2z) + 4 \ge 0$. Completando quadrados, temos

$$\begin{aligned}
&(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1) + 4 - 3 \ge 0\\
\Leftrightarrow &(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + 1 \ge 1 > 0.
\end{aligned}$$

24. Como $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$, note que a inequação equivale a

$$\begin{aligned}
&2ab + 2bc + 2ca \le 2a^2 + 2b^2 + 2c^2\\
\Leftrightarrow &2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \ge 0\\
\Leftrightarrow &(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0.
\end{aligned}$$

Material elaborado por Lorena Carvalho Bulhosa