Introdução ao Cálculo - Funções Contínuas

Continuidades laterais e em um intervalo

Introdução ao Cálculo

Material elaborado por Lorena Bulhosa

Introdução ao Cálculo - Funções Contínuas
Continuidades laterais e em um intervalo

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine m e n de modo que a função

$$f(x) = \begin{cases} mx^3 - 1, \text{ se } x < 1 \text{ e } x \neq 0 \\ x^2 - m, \text{ se } x \geq 1 \\ n - m, \text{ se } x = 0. \end{cases}$$

seja contínua.

Exercício 2. Determine, se possível, $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ seja contínua.

a)

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, \text{ se } x > -1 \\ 3, \text{ se } x = -1 \\ 5 - ax, \text{ se } x < -1. \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, \text{ se } x \neq 2 \\ a, \text{ se } x = 2. \end{cases}$$

Exercício 3. Verifique que a função

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3}$$

definida em $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ é contínua.

Exercício 4. O potencial Φ de uma distribuição de carga num ponto do eixo dos x é dado por

$$\Phi(x) = \begin{cases} 2\pi\sigma(\sqrt{x^2 + a^2} - x), \text{ se } x \geq 0 \\ 2\pi\sigma(\sqrt{x^2 + a^2} + x), \text{ se } x < 0. \end{cases},$$

onde $a, \sigma > 0$ são constantes. A função Φ é contínua?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3, \text{ se } x < 2 \\ 1, \text{ se } x = 2 \\ \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}, \text{ se } x > 2. \end{cases},$$

a) Mostre que g é contínua à esquerda em $x = 2$.

b) Mostre que g é contínua à direita em $x = 2$.

c) Conclua que g é contínua em $\mathbb{R}$.

Exercício 6. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}, \text{ se } x < 1 \\ 3, \text{ se } x = 1 \\ 2x - 1, \text{ se } x > 1. \end{cases},$$

a) Mostre que h é contínua à esquerda em $x = 1$.

b) Mostre que h não é contínua à direita em $x = 1$.

c) Conclua que h é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercício 7. Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - |x|}{x}, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0. \end{cases}$$

Analise as sentenças a seguir.

I. f é contínua à esquerda em $x = 0$.

II. f é contínua à direita em $x = 0$.

III. f é contínua em $x = 0$.

IV. f é contínua em $[0, +\infty)$.

V. f é contínua em $(-\infty, 0]$.

Marque a alternativa correta:

a) apenas I e V estão corretas

b) apenas II e IV estão corretas

c) apenas I está correta

d) apenas II está correta

e) todas estão corretas

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 8. Seja f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 5, \text{ se } x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2}, \text{ se } -3 \leq x \leq 3 \\ 3 - x, \text{ se } x > 3. \end{cases}$$

Escolha a alternativa verdadeira.

a) f é contínua em $\mathbb{R}$.

b) f é contínua em $[3, +\infty)$.

c) f é contínua apenas em $(-3, 3)$.

d) f é contínua em $(-\infty, -3]$.

e) f é contínua apenas em $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$.

Exercício 9. Considere a função $f(x) = \operatorname{tg}(1/x)$. Determine seu domínio maximal de definição e analise sua continuidade.

Exercício 10. Função de Heavside. Em circuitos elétricos a função de heavside ou função degrau unitário é utilizada para representar o surgimento ou a interrupção de corrente elétrica quando chaves são ligadas ou desligadas. Ela é definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } t < 0 \\ 1, \text{ se } t \geq 0. \end{cases}$$

Discuta a continuidade das funções $g(t) = H(t^2 + 1)$ e $f(t) = H(sen(\pi t))$. Esboce os gráficos das funções em $[-3, 3]$.

Exercício 11. Função sinal. A função sinal $sgn(t)$ é definida por

$$sgn(t) = \begin{cases} -1, \text{ se } t < 0 \\ 0, \text{ se } t = 0 \\ 1, \text{ se } t > 0. \end{cases}$$

Discuta a continuidade das funções $f(t) = sgn(t)$ e $g(t) = t.sgn(t)$.

Exercício 12. Função parte inteira. A função parte inteira de x, $\lfloor x \rfloor$, é definida como o maior inteiro que é menor ou igual a x.

a) Considere $\lfloor x \rfloor : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Onde $\lfloor x \rfloor$ é contínua?

b) Considere $\lfloor x \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determine os pontos onde $\lfloor x \rfloor$ é contínua à direita e onde $\lfloor x \rfloor$ é contínua à esquerda. Em seguida conclua quais os pontos onde $\lfloor x \rfloor$ é contínua.

Exercício 13. A função g é contínua em $[a, b]$, a função h é contínua em $[b, c]$ e $g(b) = h(b)$. Se $f(x) = g(x)$ para todo x em $[a, b]$ e $f(x) = h(x)$ para todo x em $[b, c]$, mostre que f é contínua em $[a, c]$.

Respostas e Soluções.

1. No ponto $x = 1$,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} mx^3 - 1 = m - 1$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 - m = 1 - m.$$

Para existir o limite quando $x \to 1$, devemos ter

$$m - 1 = 1 - m \Rightarrow m = 1.$$

Assim, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$. Por outro lado, $f(1) = 1^2 - m = 1^2 - 1 = 0$. Logo, f é contínua em $x = 1$ se $m = 1$.

No ponto $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} mx^3 - 1 = \lim_{x \to 0} x^3 - 1 = -1.$$

Temos

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -1 = n - m = n - 1 \Rightarrow n = 0.$$

Assim, se $m = 1$ e $n = 0$, f é contínua em $x = 0$.

Assumindo $m = 1$ e $n = 0$,

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, \text{ se } x < 1 \text{ e } x \neq 0 \\ x^2 - 1, \text{ se } x \geq 1 \\ -1, \text{ se } x = 0. \end{cases}$$

Por fim, para $a > 1$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 - 1 = a^2 - 1 = f(a).$$

Para $a < 1$, $a \neq 0$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to 0} x^3 - 1 = a^3 - 1 = f(a).$$

Assim, f é contínua para $x > 1$ e $x < 1, x \neq 0$. Segue que f é contínua para $m = 1$ e $n = 0$.

2. a)

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} 3x - 2 = -5 \neq 3 = f(-1).$$

Logo, f não é contínua pela direita em $x = -1$, então não é contínua em $x = -1$, independente do valor de a. Segue que não existe $a \in \mathbb{R}$ tal que f seja contínua.

b) Para $a \neq 2$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{a^2 - 4}{a - 2} = a + 2 = f(a).$$

Logo, f é contínua em todo $x \neq 2$, independente do valor de a.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2}$$
$$= \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4.$$

Por outro lado $f(2) = a$.

Assim,

$$\text{f é contínua em } x = 2 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow a = 4.$$

Segue que f é contínua se $a = 4$.

3. É claro que a função é contínua. De fato, note que os pontos $1, 2$ e 3 não pertencem ao domínio da função, e a função é contínua nos outros pontos, pois para $a \neq 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} \\ &= \frac{1}{a-1} + \frac{2}{a-2} + \frac{3}{a-3} = f(a).\end{aligned}$$

4. Se $b > 0$,

$$\lim_{x\to b} \Phi(x) = \lim_{x\to b} 2\pi\sigma\sqrt{x^2 + a^2} - x = 2\pi\sigma\sqrt{b^2 + a^2} - b = \Phi(b).$$

Se $b < 0$,

$$\lim_{x\to b} \Phi(x) = \lim_{x\to b} 2\pi\sigma\sqrt{x^2 + a^2} + x = 2\pi\sigma\sqrt{b^2 + a^2} + b = \Phi(b).$$

Assim, para $b \neq 0$, $\lim_{x\to b} \Phi(x) = \Phi(b)$, logo Φ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Para $x = 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} \Phi(x) &= \lim_{x\to 0^-} 2\pi\sigma\sqrt{x^2 + a^2} - x = 2\pi\sigma a \\ \lim_{x\to 0^+} \Phi(x) &= \lim_{x\to 0^+} 2\pi\sigma\sqrt{x^2 + a^2} + x = 2\pi\sigma a.\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x\to 0} \Phi(x) = 2\pi\sigma a = \Phi(0)$ e, daí, Φ é contínua em $x = 0$. Segue que Φ é contínua em todos os pontos do seu domínio ($\mathbb{R}$). Portanto, Φ é contínua.

5. a)

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 - 3 = 1 = f(2).$$

Logo, g é contínua à esquerda em $x = 2$.

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+} g(x) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2^+} x - 1 = 1 = f(2).\end{aligned}$$

Logo, g é contínua à direita em $x = 2$.

c) Dos ítens anteriores, $\lim_{x\to 2} g(x) = f(2)$ e, portanto, g é contínua em $x = 2$. Se $x < 2$ ou $x > 2$, é clara a continuidade de g. Logo g é contínua em $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Assim, g é contínua em $\{2\} \cup (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) = \mathbb{R}$.

6. a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} h(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} x + 2 = 3 = h(1).\end{aligned}$$

Logo, h é contínua à esquerda em $x = 1$.

b)

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x - 1 = 1 \neq 3 = h(1).$$

Logo, h não é contínua à direita em $x = 1$.

c) Dos ítens anteriores, não existe o limite de h quando $x \to 1$, portanto h não é contínua em $x = 1$. Se $a < 1$ ou $a > 1$ é clara a continuidade de h. Assim, h é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

7. Usando que $|x| = x$ se $x \geq 0$, e $|x| = -x$ se $x < 0$, a função $f(x)$ para $x \neq 0$ é definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x}{x} = 0, & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{x + x}{x} = 2, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Assim,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \geq 0 \\ 2, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Dica: Como a função é simples, o estudante deve fazer o esboço do gráfico para visualização das respostas.

I.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 2 = 2 \neq 0 = f(0)$$

Assim, a sentença I é falsa.

II.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0 = f(0)$$

Assim, a sentença II é verdadeira.

III. Segue de I e II que a função não é contínua no zero, logo a sentença III é falsa.

IV,V. Como f não é contínua em $x = 0$ e esse ponto pertence aos intervalos considerados, ambas sentenças são falsas.

Segue que a resposta certa é a letra (d).

8. Se $a < -3$, $-3 < a < 3$ ou $a > 3$, a continuidade de f é clara. Vamos analisar agora os pontos $x = -3$ e $x = 3$. Temos $f(-3) = f(3) = 0$.

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} x + 5 = 2 \neq f(-3).$$

Logo, f não é contínua em $x = -3$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^-} f(x) &= \lim_{x\to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) &= \lim_{x\to 3^+} 3 - x = 0.\end{aligned}$$

Assim, $\lim_{x \to 3} f(x) = 0 = f(3)$ e f é contínua em $x = 3$.

Resumindo, f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. A opção correta é a letra (b).

9. Como a divisão por zero não é definida, $x = 0$ não pode pertencer ao domínio de f. Pelo mesmo motivo devemos ter $\cos(1/x) \neq 0$. Como $\cos(t) = 0$ para $t = (2k+1)\pi/2$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, então $\cos(1/x) = 0$ para $1/x = (2k+1)\pi/2$, ou seja, $x = 2/[(2k+1)\pi]$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Retirando esses pontos, o domínio maximal de f é

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0 \text{ e } x \neq \frac{2}{(2k+1)\pi}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Para $a \in Dom(f)$,

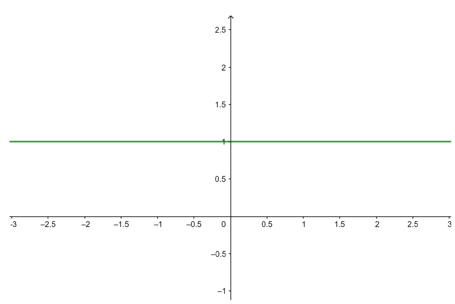
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \text{tg}(1/x) = \text{tg}(1/a) = f(a).$$

Logo, f é contínua.

10.

$$g(t) = H(t^2+1) = \begin{cases} 0, \text{ se } t^2+1 < 0 \\ 1, \text{ se } t^2+1 \geq 0 \end{cases}$$

Como $t^2+1 \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$. A função constante g é contínua em $\mathbb{R}$. Veja o gráfico de g em $[-3, 3]$ abaixo.



$$f(t) = H(\sin(\pi t)) = \begin{cases} 0, \text{ se } \sin(\pi t) < 0 \\ 1, \text{ se } \sin(\pi t) \geq 0 \end{cases}$$

Veja o gráfico da função seno se necessário ou utilize o círculo trigonométrico para auxiliar. Temos que

$$\begin{cases} \sin(\pi t) < 0, \text{ se } (2k-1)\pi < \pi t < 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \sin(\pi t) \geq 0, \text{ se } 2k\pi \leq \pi t \leq (2k+1)\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases},$$

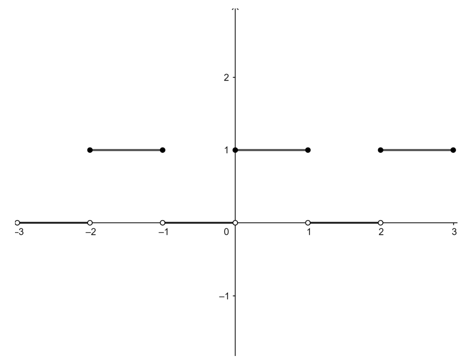
o que é equivalente a

$$\begin{cases} \sin(\pi t) < 0, \text{ se } (2k-1) < t < 2k, & k \in \mathbb{Z} \\ \sin(\pi t) \geq 0, \text{ se } 2k \leq t \leq (2k+1), & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Assim,

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } (2k-1) < t < 2k, & k \in \mathbb{Z} \\ 1, \text{ se } 2k \leq t \leq (2k+1), & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Veja o gráfico de f em $[-3, 3]$.



A função f é constante em cada intervalo $(2k-1, 2k)$ e $(2k, 2k+1)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, logo contínua nos pontos destes intervalos. De fato, se $a \in (2k-1, 2k)$, então

$$\lim_{t \to a} f(t) = \lim_{t \to a} 0 = 0 = f(a).$$

Analogamente, se $a \in (2k, 2k+1)$, então

$$\lim_{t \to a} f(t) = \lim_{t \to a} 1 = 1 = f(a).$$

Agora considere $a \in \mathbb{Z}$ par.

$$\lim_{t \to a^-} f(t) = \lim_{t \to a^-} 0 = 0$$
$$\lim_{t \to a^+} f(t) = \lim_{t \to a^+} 1 = 1.$$

Logo, não existe o limite quando x tende a um número par e, portanto, f não é contínua nos números pares. Analogamente, vemos que f não é contínua nos números ímpares.

Segue que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

11. A função sinal f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Em $x = 0$ verifique que os limites laterais são diferentes, logo o limite não existe e a função não é contínua neste ponto.

A função g é contínua em $\mathbb{R}$. Perceba que a função $g(t) = |t|$. Agora basta verificar a continuidade da função módulo.

12. a) $\lfloor x \rfloor : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é definida por

$$\lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0, \text{ se } 0 \leq x < 1 \\ 1, \text{ se } x = 1. \end{cases}$$

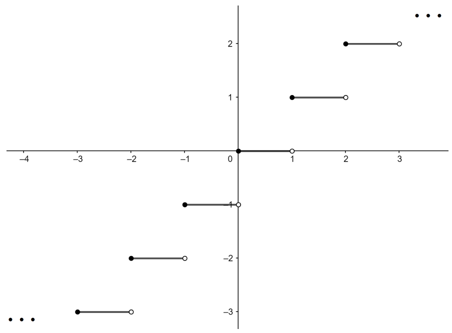
Assim,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 0 = 0 = f(0)$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 0 = 0 \neq 1 = f(1).$$

Logo, $\lfloor x \rfloor$ é contínua pela direita em $x = 0$, mas não é contínua pela esquerda em $x = 1$. Se $0 < x < 1$, é claro que a função é contínua.

Resumindo o resultado, $\lfloor x \rfloor$ é contínua no intervalo $[0, 1)$.

b) Veja o gráfico de $\lfloor x \rfloor$ para auxiliar.



$\lfloor x \rfloor = k,$ se $x \in [k, k+1), \forall k \in \mathbb{Z}$.
Se $a \notin \mathbb{Z}$, então $a \in (k, k+1)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\lim_{x \to a} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \to a} k = k = \lfloor a \rfloor .$$

Segue que $\lfloor x \rfloor$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Em particular, $\lfloor x \rfloor$ é contínua à esquerda e à direita em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Se $a \in \mathbb{Z}$, então $a \in [a, a+1)$. Assim,

$$\lim_{x \to a^+} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \to a^+} a = a = \lfloor a \rfloor .$$

Segue que $\lfloor x \rfloor$ é contínua à direita em $\mathbb{Z}$. Por outro lado,

$$\lim_{x \to a^-} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \to a^-} a - 1 = a - 1 \neq a = \lfloor a \rfloor .$$

Segue que $\lfloor x \rfloor$ não é contínua à esquerda em $\mathbb{Z}$. Aqui, $\lfloor x \rfloor$ não é contínua em $\mathbb{Z}$.
Resumindo os resultados,

- $\lfloor x \rfloor$ é contínua à direita em todo x real,
- $\lfloor x \rfloor$ é contínua à esquerda apenas em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,
- $\lfloor x \rfloor$ é contínua apenas em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

13. A função f é contínua em $[a, c]$ se valem as condições:

(i) f é contínua em (a, c)

(ii) f é contínua à direita em $x = a$

(iii) f é contínua à esquerda em $x = c$

Vamos mostrar cada ítem.

(i) Considere $a < t < b < c$.

$$\lim_{x \to t} f(x) = \lim_{x \to t} g(x) = g(t) = f(t),$$

onde a primeira e a última igualdade são válidas pois $g(x) = f(x)$ em $[a, b]$. A segunda igualdade vem da continuidade de g em $[a, b]$. Vamos seguir utilizando esse raciocínio.

Considere $a < b < t < c$.

$$\lim_{x \to t} f(x) = \lim_{x \to t} h(x) = h(t) = f(t).$$

Para $x = b$,

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = g(b) = f(b),$$
$$\lim_{x \to b^+} f(x) = \lim_{x \to b^+} h(x) = h(b) = f(b).$$

Logo, $\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^+} f(x) = f(b)$.

Concluímos aqui que f é contínua em (a, c).

(ii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = g(a) = f(a)$.
Logo, f é contínua à direita em $x = a$.

(iii) $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^-} h(x) = h(c) = f(c)$.
Logo, f é contínua à esquerda em $x = c$.

Material elaborado por Lorena Bulhosa