

# Módulo de Juros e Porcentagem

## Introdução à Porcentagem

### Sétimo Ano



## Introdução à Porcentagem

### 1 Exercícios Introdutórios

**Exercício 1.** Conforme os exemplos, represente os decimais como porcentagens:

Exemplo i)  $0,03 = \frac{3}{100} = 3\%$

Exemplo ii)  $0,7 = \frac{7}{10} = \frac{70}{100} = 70\%$

Exemplo iii)  $0,258 = \frac{258}{1000} = \frac{25,8}{100} = 25,8\%$

- a) 0,04.
- b) 0,23.
- c) 0,8.
- d) 0,562.

**Exercício 2.** Calcule o valor numérico das expressões abaixo:

Exemplo i)  $5\% \cdot 80 = \frac{5}{100} \cdot 80 = 4.$

Exemplo ii)  $12\% \cdot 500 = \frac{12}{100} \cdot 500 = 60.$

Exemplo iii)  $33,5\% \cdot 420 = \frac{33,5}{100} \cdot 420 = \frac{335}{1000} \cdot 420 = 140,7$

- a)  $4\% \cdot 1800.$
- b)  $36\% \cdot 75.$
- c)  $24,7\% \cdot 500.$
- d)  $4\% \cdot 1800.$

**Exercício 3.** A proposição “de” é utilizada em matemática para indicar a operação de multiplicação, por exemplo:

i)  $10\% \text{ de } 40 = 10\% \cdot 40 = \frac{10}{100} \cdot 40 = 4$

ii)  $23\% \text{ de } 200 = 23\% \cdot 200 = \frac{23}{100} \cdot 200 = 46.$

A partir dessa informação, calcule os valores das expressões abaixo.

- a) 7% de 900.
- b) 36% de 25.
- c) 120% de 30.

**Exercício 4.** Siga o modelo e calcule as porcentagens:

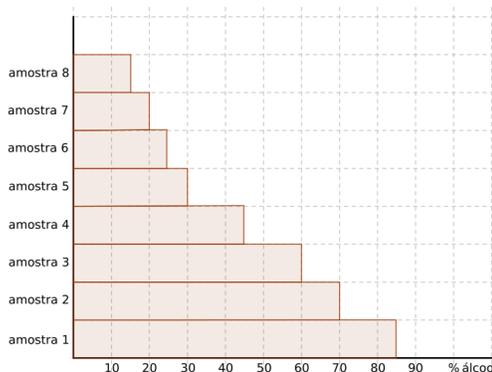
$$\begin{aligned} 5\% \cdot 130 &= \frac{5}{100} \cdot 130 \\ &= \frac{650}{100} \\ &= 6,5. \end{aligned}$$

- a)  $10\% \cdot 120.$
- b)  $7\% \cdot 80.$
- c)  $15\% \cdot 90.$
- d)  $0,5\% \cdot 200.$

**Exercício 5.** Calcule:

- a) o quadrado de 4% e expresse o resultado como em porcentagens;
- b) a raiz quadrada de 64% e expresse o resultado em porcentagens;
- c) o valor de 6% de 180.

**Exercício 6.** Para testar a qualidade de um combustível composto apenas de gasolina e álcool, uma empresa recolheu oito amostras em vários postos de gasolina. Para cada amostra foi determinado o percentual de álcool e o resultado é mostrado no gráfico abaixo. Em quais dessas amostras o percentual de álcool é maior que o percentual de gasolina?



**Exercício 7.** Contrariando o plano real, um comerciante aumenta o preço de um produto que custava R\$ 300,00 em 20%. Um mês depois arrependeu-se e fez um desconto de 20% sobre o preço reajustado. Qual o novo preço do produto?

**Exercício 8.** A razão entre o número de meninos e meninas de uma sala de aula é de  $\frac{7}{3}$ . Qual o percentual de meninos da classe?

**Exercício 9.** Uma pessoa gastou 40% do que tinha e ainda ficou com R\$ 570,00. Quanto essa pessoa gastou?

**Exercício 10.** Um fabricante de chocolate cobrava R\$ 5,00 por uma barra de 250 gramas. Recentemente o peso da barra foi reduzido para 200 gramas, mas seu preço continuou R\$ 5,00. Qual foi o aumento percentual do preço do chocolate desse fabricante?

**Exercício 11.** Numa fábrica de tintas, certa quantidade de água deve ser misturada com 840 litros de tinta corante, de modo que a mistura tenha 25% de água. Quantos litros de água deve ter a mistura?

**Exercício 12.** Um produtor de arroz vendeu 60% da sua produção para a distribuidora A e 40% para a distribuidora B, as quais doaram 4% e 2%, respectivamente, do arroz comprado. Qual a porcentagem do arroz produzido foi doada?

**Exercício 13.** Descontos sucessivos de 20% e 30% são equivalentes a um único desconto de:

**Exercício 14.** Um produto sofreu um aumento de 25%. Em seguida, devido a variações no mercado, seu preço teve que ser reduzido também em 25%, passando a custar R\$225,00. Qual o preço desse produto antes do aumento?

**Exercício 15.** Para agilizar as contas de aumentos e descontos sucessivos pode-se trabalhar com os fatores de variação, exemplos:

Exemplo i) Aumento de 10% gera um fator de variação de  $100\% + 10\% = 110\% = \frac{110}{100} = 1,1$ .

Exemplo ii) Redução de 25% gera um fator de variação de  $100\% - 25\% = 75\% = \frac{75}{100} = 0,75$ .

Exemplo iii) Dois aumentos, um de 30% e outro de 40% gera os fatores de variação de:

- $100\% + 30\% = 130\% = \frac{130}{100} = 1,3$
- $100\% + 40\% = 140\% = \frac{140}{100} = 1,4$

O que finaliza com a sucessão de aumentos com o fator

$$1,3 \cdot 1,4 = 1,82.$$

Ou seja, esses aumentos sucessivos geram um aumento global de

$$\begin{aligned} 100\% + i\% &= 1,82 \\ \frac{100}{100} + \frac{i}{100} &= \frac{182}{100} \\ \frac{i}{100} &= \frac{182}{100} - \frac{100}{100} \\ \frac{i}{100} &= \frac{82}{100} \\ i &= 82 \end{aligned}$$

Portanto, 82% de aumento total.

Exemplo iv) Um aumento de 50% e depois um desconto de 50% gera os fatores de variação de:

- $100\% + 50\% = 150\% = \frac{150}{100} = 1,5$
- $100\% - 50\% = 50\% = \frac{50}{100} = 0,5$

O que finaliza com a sucessão de variações com o fator

$$1,5 \cdot 0,5 = 0,75.$$

Ou seja, esses aumento e desconto sucessivos geram um resultado global de

$$\begin{aligned} 100\% + i\% &= 0,75 \\ \frac{100}{100} + \frac{i}{100} &= \frac{75}{100} \\ \frac{i}{100} &= \frac{75}{100} - \frac{100}{100} \\ \frac{i}{100} &= -\frac{25}{100} \\ i &= -25 \end{aligned}$$

Sendo assim, 25% de desconto total.

Exemplo v) Dois descontos, um de 20% e outro de 60% gera os fatores de variação de:

- $100\% - 20\% = 80\% = \frac{80}{100} = 0,8$
- $100\% - 60\% = 40\% = \frac{40}{100} = 0,4$

O que finaliza com a sucessão de aumentos com o fator

$$0,8 \cdot 0,4 = 0,32.$$

Ou seja, esses descontos sucessivos geram um desconto global de

$$\begin{aligned} 100\% + i\% &= 0,32 \\ \frac{100}{100} + \frac{i}{100} &= \frac{32}{100} \\ \frac{i}{100} &= \frac{32}{100} - \frac{100}{100} \\ \frac{i}{100} &= -\frac{68}{100} \\ i &= -68 \end{aligned}$$

Portanto, 68% de desconto total.

Qual o fator de variação em cada uma das situações abaixo?

a) Aumento de 47%.

- b) Desconto de 69%.
- c) Dois aumentos sucessivos de 50% e 60%.
- d) Dois descontos sucessivos de 20% e 10%.
- e) Um aumento de 80% seguido de um desconto de 55%.

**Exercício 16.** Qual situação é mais vantajosa para dois aumentos sucessivos:

- um de 10% seguido de outro de 20% , ou
- um de 20% seguido de outro de 10% ?

**Exercício 17.** Uma mercadoria que custa R\$ 140,00 vai sofrer um aumento de 15%. Qual será o seu novo preço?

**Exercício 18.** Um celular custava R\$ 500,00 e passou a custar R\$ 800,00. Qual foi o percentual de aumento do preço?

**Exercício 19.** Um computador custava R\$ 2000,00 teve dois ajustes iguais do preço em meses consecutivos e passou a custar R\$ 2420,00. Qual foi o percentual mensal de ajuste no preço?

## 2 Exercícios de Fixação

**Exercício 20.** Um professor recebia 20 reais por hora de aula dada (hora/aula). Ele teve um aumento de 15 % no valor da hora/aula. Sabendo que ele trabalha 22 dias por mês e 8 horas por dia. Qual o novo salário do professor?

**Exercício 21.** É frequente nas lojas promoções do tipo

“Leve 4 e pague 3.”.

Qual o percentual de desconto que a loja está embutindo nessa compra?

**Exercício 22.** Joãozinho andava pela rua quando avistou em uma loja o seguinte anúncio:

“Tudo com 50% de desconto.”.

Admirado e tratando de se beneficiar com a promoção, Joãozinho entrou na loja e comentou com o vendedor: “Assim vocês devem ter prejuízo...” O vendedor explicou que, ainda assim, a margem de lucro da loja era de 20% sobre cada mercadoria. Neste caso, qual era a margem de lucro sobre cada mercadoria antes da promoção?

**Comentário para professores:** O valor arbitrário referência de R\$ 120,00 para venda não tira a generalidade da solução pois os resultados percentuais não mudam caso o valor de venda seja multiplicado por uma constante. A solução do caso geral é totalmente análoga trocando-se o valor de 120 por  $p$  arbitrário. É recomendável induzir os alunos a resolverem inicialmente o problema com valores particulares antes de abordar o caso geral.

**Exercício 23.** Um tablet custa R\$ 1000,00 está numa promoção do tipo:

“Pague à vista com 20% ou  
a prazo sem juros.”

Qual a taxa de juros embutida no pagamento a prazo?

**Exercício 24.** O valor total de um relógio é de R\$ 1500,00. Ele pode ser comprado a vista ou em duas parcelas iguais a R\$ 900,00, uma no momento da compra (denominada por “entrada”) e mais uma no início do mês seguinte. Qual a taxa de juros embutida na compra a prazo?

**Exercício 25.** Um café com apenas 15 gramas de grãos moídos em uma xícara de 100 ml é considerado fraco. Já um café com 30 gramas de grãos moídos, na mesma xícara, é considerado forte. Um sachê de café com 15 gramas custa R\$ 0,75. Um apreciador de café forte passou muitos anos consumindo os sachês até que descobriu que existe um pote de café com 300 gramas que custa R\$ 10,50.

Com o uso do pote de café estima-se uma média de 10% de desperdício, e com o sachê, nada se perde. Esse consumidor deve optar por continuar com os sachês ou comprar o pote? Qual o percentual de economia com essa escolha?

**Exercício 26.** Das 100 pessoas que estão em uma sala, 99% são homens. Quantos homens devem sair para que a porcentagem de homens na sala passe a ser 98%?

**Exercício 27.** Café com leite forte tem uma parte de leite e três partes de café. Café com leite fraco tem quatro partes de leite e uma parte de café. Determine com quantas partes de leite e quantas partes de café ficamos ao misturarmos volumes iguais do café com leite forte e do café com leite fraco.

**Exercício 28.** Num certo armazém, uma dúzia de ovos e 10 maçãs tinham o mesmo preço. Depois de uma semana, o preço dos ovos caiu 10% e o das maçãs subiu 2%. Quanto se gastará (em porcentagem) a mais na compra de uma dúzia de ovos e 10 maçãs?

**Exercício 29.** Joãozinho gastou a metade do dinheiro que tinha com um presente que comprou para a sua mãe. Em seguida, gastou 30% do que lhe restou, na compra de um jogo, e ainda ficou com R\$ 63,00. Quantos reais tinha Joãozinho antes das compras?

**Exercício 30.** Aumentando 2% o valor um número inteiro positivo, obtemos o seu sucessor. Qual é a soma desses dois números?

**Exercício 31.** Em um aquário há peixes amarelos e vermelhos: 90% são amarelos e 10% são vermelhos. Uma misteriosa doença matou muitos peixes amarelos, mas nenhum vermelho. Depois que a doença foi controlada, verificou-se que no aquário 75% dos peixes vivos eram amarelos. Aproximadamente, que porcentagem dos peixes amarelos morreram?

**Exercício 32.** Diamantino colocou em um recipiente três litros de água e um litro de suco composto de 20% de polpa e 80% de água. Depois de misturar tudo, que porcentagem do volume final é polpa?

**Exercício 33.** Na população de uma espécie rara de 1000 aves da floresta amazônica, 98% tinham cauda de cor verde. Após uma misteriosa epidemia que matou parte das aves com cauda verde, esta porcentagem caiu para 95%. Quantas aves foram eliminadas com a epidemia?

**Exercício 34.** Um colégio particular informa aos pais que a mensalidade paga até a data do vencimento tem um desconto de 8%, e a mensalidade paga com atraso tem um acréscimo de 8%. Se um pai paga a primeira mensalidade no vencimento e a segunda com atraso, o segundo pagamento teve, em relação ao primeiro, qual percentual de acréscimo?

### 3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

**Exercício 35.** Durante os últimos dois anos uma fábrica reduziu sua produção de 51%. A cada ano a redução de produção foi pela mesma porcentagem. Qual o percentual de redução em cada ano?

**Exercício 36.** Numa festa, o número de pessoas que dançam é igual a 25% do número de pessoas que não dançam. Qual é a porcentagem do total de pessoas na festa que não dançam?

**Exercício 37.** Na cidade de Pulgacibaba alguns animais são realmente esquisitos. Dez por cento dos cães pensam que são gatos e dez por cento dos gatos pensam que são cães. Todos os outros animais são perfeitamente normais. Certo dia, todos os cães e gatos de Pulgacibaba foram testados por um psicólogo, verificando-se então que 20% deles pensavam que eram gatos. Que porcentagem dos animais eram realmente cães?

**Exercício 38.** Em uma festa, o número de mulheres era quatro vezes o número de homens. Após a chegada de cinco casais, a porcentagem de homens na festa passou a ser 26%.

- Qual era o percentual de homens na festa antes da chegada dos casais?
- Quantos homens e quantas mulheres havia na festa depois da chegada dos casais?

**Exercício 39.** Um feirante vende ovos brancos e vermelhos. Em janeiro de um determinado ano, do total de vendas realizadas, 50% foram de ovos brancos e os outros 50% de ovos vermelhos. Nos meses seguintes, o feirante constatou que, a cada mês, as vendas de ovos brancos reduziram-se

10% e as de ovos vermelhos aumentaram 20%, sempre em relação ao mês anterior. Ao final do mês de março desse mesmo ano, qual o percentual de vendas de ovos vermelhos, em relação ao número total de ovos vendidos em março?

**Exercício 40.** Um torneio de tênis foi disputado por  $n$  rapazes e  $2n$  moças. Cada tenista jogou exatamente uma partida contra cada um dos outros tenistas. Se, ao final, 10% das partidas ocorreram entre rapazes, determine o valor de  $n$ .

**Exercício 41.** Um enfermeiro dispõe de um princípio ativo diluído em água em concentrações de 20% e 30%. Ele precisa de 100 ml do princípio ativo, diluído em água, e com concentração de 24%, a ser obtido misturando adequadamente quantidades do que ele dispõe. Quanto deve ser usado do composto com concentração de 20%?

**Exercício 42.** Uma empresa teve em três meses sucessivos um queda acumulada no seu faturamento de 27,1%. Se a perda média mensal se mantiver, de quanto será a queda acumulada do faturamento da empresa após o 4º mês?

**Exercício 43.** Gabriel resolveu uma prova de matemática com questões de álgebra, geometria e lógica. Após checar o resultado da prova Gabriel observou que respondeu corretamente 50% das questões de álgebra, 70% das questões de geometria e 80% das questões de lógica. Gabriel observou, também, que respondeu corretamente 62% das questões de álgebra e lógica e 74% das questões de geometria e lógica. Qual a porcentagem de questões corretas da prova de Gabriel?

**Exercício 44.** Lomonosov gasta um dinar por dia para comprar um pão e um copo de suco. Quando os preços subiram 20%, ele só pôde comprar meio pão e um copo de suco pelo mesmo dinar. Poderá um dinar pagar ao menos um copo de suco se o preço subir outra vez 20%?

**Exercício 45.** Em uma certa empresa, 10% dos empregados recebem 90% de todo o dinheiro gasto com salários. A empresa está dividida em departamentos. É possível que em cada departamento o dinheiro gasto com os salários de quaisquer 10% dos empregados seja no máximo 11% do dinheiro gasto com todos os salários pagos naquele departamento?

## 1 Exercícios Introdutórios

1.

a)  $0,04 = \frac{4}{100} = 4\%$

b)  $0,23 = \frac{23}{100} = 23\%$

c)  $0,8 = \frac{8}{10} = \frac{80}{100} = 80\%$

d)  $0,562 = \frac{562}{1000} = \frac{56,2}{100} = 56,2\%$

2.

a)  $4\% \cdot 1800 = 72$ .

b)  $36\% \cdot 75 = 27$ .

c)  $24,7\% \cdot 500 = 123,5$ .

d)  $4\% \cdot 1800 = 72$ .

3.

a)  $7\%$  de  $900 = 63$ .

b)  $36\%$  de  $25 = 9$ .

c)  $120\%$  de  $30 = 36$ .

4. a)12 b)5,6 c)13,5 d)1

5.

a)  $(4\%)^2 = \left(\frac{4}{100}\right)^2 = \left(\frac{16}{10000}\right) = \left(\frac{0,16}{100}\right) = 0,16\%$ .

b)  $\sqrt{64\%} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \frac{8}{10} = \frac{80}{100} = 80\%$ .

c)  $6\% \cdot 180 = \frac{6}{100} \cdot 180 = \frac{1080}{100} = 10,8$ .

6. (Extraído e Adaptado da OBMEP)

As amostras que o gráfico expõe possuindo um percentual de álcool acima de 50% são as respostas para o exercício. Pelo gráfico, tratam-se das amostras 1, 2 e 3.

7. (Extraído do Vestibular da UNIMEP - Rio de Janeiro)

a) Primeira situação: aumento de 20% faz com que o novo preço seja 120% do inicial:

$$120\% \cdot R\$ 300,00 = R\$ 360,00.$$

b) Segunda situação: desconto de 20% sobre o novo preço faz com que este seja 80% do anterior:

$$80\% \cdot R\$ 360,00 = R\$ 288,00.$$

Portanto, o novo preço será de R\$ 288,00.

8. Sejam  $h$  o número de meninos e  $m$  o número de meninas, ficando com  $h+m$  como número de crianças. A partir do enunciado tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{h}{m} &= \frac{7}{3} \\ \frac{h}{m+h} &= \frac{7}{3+7} \\ &= 70\%. \end{aligned}$$

Portanto, o percentual de meninos é de 70%.

9. (Adaptado do vestibular da ACAFE SC - 2014)

**Primeira solução:** Seja  $x$  o valor inicial. Se a pessoa gastou 40% do que tinha, então ela ficou com 60% de  $x$ , logo:

$$\begin{aligned} 0,60 \cdot x &= 570 \\ x &= 570 \cdot \frac{100}{60} \\ x &= 950 \end{aligned}$$

Por fim, ela gastou  $950 - 570 = 380$  reais.

**Segunda solução:** Sejam  $x$  o valor inicial e  $y$  os valor gasto. Utilizando a regra de três, temos:

$$\begin{aligned} \frac{60\% x}{570} &= \frac{40\% x}{y} \\ y &= \frac{570 \cdot 40}{60} \\ y &= 380. \end{aligned}$$

Por fim, ela gastou 380 reais.

10. (Extraído da OBMEP) Na primeira situação, cada grama custa  $5,00/250 = R\$ 0,02$  enquanto que na segunda, cada grama custa  $5,00/200 = R\$ 0,025$ . Assim, estamos pagando a mais R\$0,005 por cada grama. Para sabermos que fração percentual esse acréscimo representa no preço anterior, basta efetuarmos a divisão:

$$\frac{0,005}{0,02} = \frac{25}{100} = 25\%.$$

Ou seja, com o novo preço, estamos pagando 25% a mais do que pagávamos anteriormente por cada grama.

Observação: Veja que o acréscimo percentual no preço vale para qualquer quantidade de gramas. Assim, outra maneira de resolver o problema seria comparar a variação de preços para um múltiplo comum das duas quantidades. Anteriormente, por um quilo pagávamos  $R\$5,00 \times 4 = R\$ 20,00$ . Com o novo preço, o valor sobe para  $R\$5,00 \times 5 = R\$ 25,00$ . A diferença de R\$ 5,00 representa o aumento percentual de:

$$\frac{5}{20} = \frac{25}{100} = 25\%.$$

11. (Adaptado do vestibular da ACADEMIA DE CIÊNCIAS - 2014)

**Primeira Solução:**

Se a mistura ( $x$  litros) deve ter 25% de água, então a tinta equivale 75% do total. Sendo assim,

$$\begin{aligned}75\% \cdot x &= 840 \\x &= 840 \cdot \frac{4}{3} \\x &= 1120\end{aligned}$$

Por fim, a quantidade de água é de  $1120 - 840 = 280$  litros.

**Segunda Solução:**

Se a mistura deve ter 25% de água ( $x$  litros), então a tinta equivale 75% (840 litros) do total. Utilizando uma regra de 3, obtem-se que 25% está para  $x$  assim como 75% está para 840, daí:

$$\begin{aligned}\frac{25\%}{x} &= \frac{75\%}{840} \\ \frac{x}{25\%} &= \frac{840}{75\%} \\ \frac{x}{1} &= \frac{840}{3} \\ x &= 280.\end{aligned}$$

Por fim, a quantidade de água é de 280 litros.

12. (Extraído do Vestibular da UFU - Minas Gerais)

i) Porcentagem doada por A:

$$4\% \cdot 60\% = \frac{4}{100} \cdot \frac{60}{100} = \frac{240}{10000}.$$

ii) Porcentagem doada por B:

$$2\% \cdot 40\% = \frac{2}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{80}{10000}.$$

iii) Porcentagem resultante:

$$\frac{240}{10000} + \frac{80}{10000} = \frac{320}{10000} = \frac{3,2}{100} = 3,2\%.$$

13.

i) Um desconto de 20% faz com que fiquemos com 80% do valor inicial  $V$ :

$$80\% \cdot V = \frac{80}{100} V.$$

ii) Um desconto de 30% sobre o novo preço faz com que este seja 70% do anterior:

$$70\% \cdot 80\% \cdot V = \frac{70}{100} \cdot \frac{80}{100} V = \frac{56}{100} V = 56\% \cdot V.$$

Como só nos restou 56% do valor de  $V$ , os descontos sucessivos de 20% e 30% são equivalentes a um desconto de  $100\% - 56\% = 44\%$ .

14. (Extraído do Vestibular do CEFET - Ceará)

i) Um aumento de 25% faz com que fiquemos com 125% do valor inicial  $V$ , ou seja,  $125\% \cdot V$ .

ii) Um desconto de 25% sobre o novo preço faz com que este seja 75% do anterior, ou seja,  $125\% \cdot 75\% \cdot V$

iii) Igualando ao valor dado:

$$\begin{aligned}125\% \cdot 75\% \cdot V &= 225 \\ \frac{125}{100} \cdot \frac{75}{100} \cdot V &= 225 \\ V &= 225 \cdot \frac{100}{125} \cdot \frac{100}{75} \\ V &= 240.\end{aligned}$$

Portanto,  $V = R\$240,00$ .

15.

a) 1,47

b) 0,31

c)  $1,5 \cdot 1,6 = 2,4$

d)  $0,8 \cdot 0,9 = 0,72$

e)  $1,8 \cdot 0,55 = 0,99$

16. Os fatores de variação serão 1,1 e 1,2 e o cálculo do fator global é feito por uma multiplicação e, como a ordem dos fatores não altera o produto, as duas situações são equivalentes, a saber:

$$1,1 \cdot 1,2 = 1,2 \cdot 1,1 = 1,32.$$

17. Um aumento de 15% gera um fator de variação de 1,15. Logo, o novo preço será  $1,15 \cdot 140 = R\$161,00$ .

18. O fator de aumento será  $(1 + i)$ .

$$\begin{aligned}(1 + i) \cdot 500 &= 800 \\ 1 + i &= \frac{800}{500} \\ 1 + i &= 1,6 \\ i &= 0,6\end{aligned}$$

Portanto, 60% de aumento.

19. O fator de aumento a cada mês será  $(1 + i)$  e como foram dois meses ficamos com  $(1 + i)^2$ .

$$\begin{aligned}(1 + i)^2 \cdot 2000 &= 2420 \\ (1 + i)^2 &= \frac{2420}{2000} \\ (1 + i)^2 &= 1,21 \\ 1 + i &= \sqrt{1,21} \\ 1 + i &= 1,1 \\ i &= 0,1\end{aligned}$$

Sendo assim, o percentual mensal foi de 10%.

## 2 Exercícios de Fixação

20. Inicialmente, deve-se calcular o novo valor ganho por hora de aula,

$$115\% \text{ de } 20 = 1,15 \cdot 20 = 23.$$

Agora basta calcular o total de horas trabalhadas no mês vezes o valor atual da hora/aula ficando com:

$$23 \cdot 22 \cdot 8 = 4048 \text{ reais.}$$

21. O fator de variação é  $(1 + i)$ , portanto

$$\begin{aligned}(1 + i) \cdot 4 &= 3 \\ 1 + i &= \frac{3}{4} \\ i &= 0,75 - 1 \\ i &= -0,25\end{aligned}$$

Sendo assim, o percentual de desconto foi de 25%.

22. (Extraído do Clube de Matemática da OBMEP) Suponhamos que o preço original de venda de uma mercadoria fosse de R\$ 120,00. Na promoção, essa mercadoria valeria, então, R\$ 60,00. Se, para esta venda, a margem de lucro da loja é de 20% e o valor do produto é  $V$ , temos:

$$\begin{aligned}60 &= V + 20\% \cdot V \\ &= 1,2V\end{aligned}$$

Consequentemente,  $V = R\$ 50,00$ . O lucro original então seria de  $120,00 - 50,00 = R\$ 70,00$ , o que representa a margem de lucro de  $\frac{70}{50} = 140\%$  sobre o valor de custo da mercadoria.

**Comentário para professores:** O valor arbitrário referência de R\$ 120,00 para venda não tira a generalidade da solução pois os resultados percentuais não mudam caso o valor de venda seja multiplicado por uma constante. A solução do caso geral é totalmente análoga trocando-se o valor de 120 por  $p$  arbitrário. É recomendável induzir os alunos a resolverem inicialmente o problema com valores particulares antes de abordar o caso geral.

23. A ideia aqui é pensar que o preço do produto não é R\$ 1000,00, pois esse valor só será feito no pagamento a prazo. Logo, o valor à vista é o preço real da mercadoria:

$$0,8 \cdot 1000 = 800.$$

Sendo assim, o juros será calculado utilizando o fator de variação  $(1 + i)$ .

$$\begin{aligned}(1 + i) \cdot 800 &= 1000 \\ 1 + i &= \frac{1000}{800} \\ 1 + i &= 1,25 \\ i &= 0,25\end{aligned}$$

Daí, a taxa de juros é de 25%.

24. Como o valor da compra é de R\$ 1500,00 e há um pagamento no ato da compra de R\$ 900,00, o comprador fica devendo a loja  $1500 - 900 = 600$  reais. O fator de variação que torna o valor devido para 900 reais é de  $(1 + i)$ , daí:

$$\begin{aligned}(1 + i) \cdot 600 &= 900 \\ 1 + i &= \frac{900}{600} \\ 1 + i &= 1,5 \\ i &= 0,50\end{aligned}$$

Daí, a taxa de aumento é de 50%.

25. Inicialmente deve-se estabelecer uma base comparativa para cálculo. O pote de 300 gramas, retirando a média do desperdício(10%), serve  $0,90 \cdot 300 = 270$  gramas, ou seja, 9 cafés fortes. Para fazer essa quantidade com os sachês é preciso comprar 18 sachês, o que gera um custo de  $18 \cdot 0,75 = 13,50$  reais. Portanto, é melhor comprar o pote. A economia é de  $13,50 - 10,80 = 2,70$  que percentualmente fica de:

$$\frac{2,70}{13,50} = 0,20 = 20\%.$$

26. Na sala há 100 pessoas e como 99% são homens, há 99 homens e 1 mulher. Para que o número de homens se torne 98%, o número de mulheres deve virar 2%, ou seja 1 mulher vai equivaler a 2% do novo total “ $x$ ” de pessoas. Sendo assim,

$$\begin{aligned}2\% \text{ de } x &= 1 \\ \frac{2}{100} \cdot x &= 1 \\ x &= 50\end{aligned}$$

Por fim, precisariam ficar 50 pessoas com 1 mulher, logo permaneceriam 49 homens e 50 precisariam sair da sala.

27. Para o café com leite forte tem-se  $\frac{1}{4} = 25\%$  de leite e  $\frac{3}{4} = 75\%$  de café. Para o café com leite fraco tem-se  $\frac{4}{5} = 80\%$  de leite e  $\frac{1}{5} = 20\%$  de café. Seja “ $v$ ” o volume

de cada café com leite antes da mistura. Sendo assim:

$$\begin{aligned}
 \text{Café com leite forte} &= \\
 \text{Partes de Leite} &= 0,25v \\
 \text{Partes de Café} &= 0,75v \\
 \\ 
 \text{Café com leite forte:} &= v \\
 \text{Partes de Leite} &= 0,80v \\
 \text{Partes de Café} &= 0,20v \\
 \\ 
 \text{Mistura:} &= 2v \\
 \text{Partes de Leite} &= 0,25v + 0,80v = 1,05v \\
 \text{Partes de Café} &= 0,75v + 0,20v = 0,95v \\
 \\ 
 \frac{\text{Partes de Leite}}{\text{Partes de Café}} &= \frac{1,05v}{0,95v} \\
 &= \frac{105v}{95v} \\
 &= \frac{21}{19}
 \end{aligned}$$

Ficamos então com 21 partes de leite para 19 partes de café.

**28.** (Extraído da OBMEP)

Seja  $V$  o preço da dúzia de ovos que coincide com o preço da dezena de maçãs. Com a subida de 10% no preço dos ovos, a dúzia passará a custar  $V + 10\%V = 1,1V$ . Com a queda de 2% no preço das maçãs, elas passarão a custar  $V - 2\%V = 0,98V$ . Daí, antes o preço da compra pedida era  $2V$  e agora passou para  $2,08V$ . Tivemos assim um aumento de 0,08 que corresponde ao aumento percentual de:

$$\frac{0,08V}{2V} = 0,04 = \frac{4}{100} = 4\%.$$

Observação: Perceba que poderíamos ter atribuído um valor arbitrário para  $V$  e a resposta seria a mesma pois o percentual não se altera quando multiplicamos os valores por uma mesma constante.

**29.** Seja  $x$  a quantidade inicial de dinheiro do Joãozinho.

- i) Após comprar o presente para a mãe, Joãozinho ficou com  $\frac{x}{2}$ .
- ii) Após gastar 30% do que sobrou, ele ficou com

$$70\% \cdot \frac{x}{2} = \frac{70x}{200}.$$

Portanto,  $\frac{70x}{200} = 63$  e  $x = R\$ 180,00$ .

**30.** (Extraído da OBM)

Como o aumento de 2% de um número  $x$  corresponde à 1, temos  $\frac{2x}{100} = 1$  e  $x = 50$ . Portanto, seu sucessor é 51 e a soma de ambos é 101.

**31.** (Extraído da OBM)

Seja 100 a quantidade de peixes no aquário. Se  $A$  e  $V$  denotam as quantidades de peixes amarelos e vermelhos, temos  $A = 90$  e  $V = 10$ . Se após a morte de  $x$  peixes amarelos eles ainda constituíam 75% dos peixes restantes, temos

$$90 - x = \frac{75}{100}(100 - x),$$

ou seja,  $x = 60$ . Se morreram 60 dos 90 peixes amarelos, a mortandade foi de

$$\frac{60}{90} = \frac{2}{3} = 0,666... = \frac{66,6}{100},$$

ou seja, aproximadamente 67%.

**32.** (Extraído da OBM)

A mistura final tem 0,2 litros de polpa e  $3+0,8 = 3,8$  litros de água. A porcentagem de polpa em relação ao volume da mistura é  $\frac{0,2}{4} = \frac{2}{40} = 0,05 = 5\%$ .

**33.** (Extraído da OBM)

Inicialmente existiam 980 aves com a cauda verde e 20 das demais. Após a epidemia, estas 20 aves correspondem a 5%, donde o total de aves agora é  $20 \times 20 = 400$  (sendo 380 da cauda verde). Portanto, morreram 600 aves.

**34.** (Adaptado do vestibular da ACAFE SC - 2014)

Seja  $x$  o valor da mensalidade sem desconto e sem acréscimo. O valor pago com 8% de desconto fica  $0,92x$  e o valor pago com 8% de acréscimo fica  $1,08x$ . Portanto o percentual do segundo pagamento em relação ao primeiro pode ser calculado por  $\frac{1,08}{0,92} = 1,1739...$  O percentual de acréscimo fica em torno de 17,39%.

### 3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

**35.** (Extraído da Olimpíada de Matemática da Rússia)

Se houve uma redução de 51% então a produção atual é de 49%. Como o fator de variação do bimestre foi  $(1+i)^2$ , temos:

$$\begin{aligned}
 (1+i)^2 &= 0,49 \\
 1+i &= \sqrt{\frac{49}{100}} \\
 1+i &= \frac{7}{10} \\
 i &= -0,3
 \end{aligned}$$

Redução mensal de 30%.

**36.** (Extraído da OBM)

Sejam  $x$  e  $y$  os números de pessoas que dançam e que não dançam, respectivamente. Como  $x = \frac{25}{100} \cdot y$ , temos  $y = 4x$ . Portanto, a porcentagem do número de pessoas que não dançam é:

$$\frac{y}{x+y} = \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5} = \frac{80}{100} = 80\%.$$

**37.** (Extraído dos Clubes de Matemática da OBMEP)

Sejam  $c$  o número de cães e  $g$  o número de gatos. Tem-se:

$$\begin{aligned} 10\% \text{ de } c + 90\% \text{ de } g &= 20\% \text{ de } (c + g) \\ 0,10c + 0,90g &= 0,20c + 0,20g \\ c + 9g &= 2c + 2g \\ 7g &= c \\ c &= 7g \end{aligned}$$

Por fim,  $\frac{\text{Cães}}{\text{Total}} = \frac{c}{c+g} = \frac{7g}{7g+g} = \frac{7}{8} = 87,5\%$ .

**38.** (Extraído da OBMEP)

a) Sejam  $m$  o número de mulheres e  $h$  o número de homens antes da chegada dos cinco casais. Como o número de mulheres era quatro vezes o número dos homens, temos:

$$m = 4h.$$

Deste modo, a fração de homens pelo total de pessoas presentes antes da chegada dos cinco casais era:

$$\frac{h}{h+m} = \frac{h}{h+4h} = \frac{h}{5h} = \frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 20\%$$

b) Após a chegada dos cinco casais, ficamos com  $h + 5$  homens e  $m + 5$  mulheres. Assim, o novo percentual de homens é:

$$\frac{h+5}{h+5+m+5} = \frac{h+5}{h+4h+10} = \frac{h+5}{5h+10}.$$

Fazendo  $\frac{h+5}{5h+10} = \frac{26}{100}$ , temos  $h = 8$ . Consequentemente  $m = 4h = 32$  e após a chegada dos cinco casais teremos  $8 + 5 = 13$  homens e  $32 + 5 = 37$  mulheres.

**39.** (Extraído do Vestibular da UERJ 2014)

Tomando como base o total de ovos como 1000, dividindo-se igualmente 500 para cada cor de ovo pode-se analisar a passagem dos meses (de janeiro para fevereiro e fevereiro para março) pelo fator de variação  $(1+i)^2$ , com  $i = -10\%$

para os brancos e  $i = 20\%$  para os vermelhos.

$$\begin{aligned} \text{Ovos Brancos} &= (1-0,1)^2 \cdot 500 \\ \text{Ovos Brancos} &= 405 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ovos Vermelhos} &= (1+0,2)^2 \cdot 50 \\ \text{Ovos Vermelhos} &= 720 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{Ovos Vermelhos}}{\text{Total de Ovos}} &= \frac{720}{405+720} \\ &= \frac{720}{1125} \\ &= 0,64. \end{aligned}$$

Portanto, 64%.

**40.** (Extraído do exame de acesso do PROFMAT)

Basta observar que há  $3n$  pessoas e total<sup>1</sup> de partidas disputas por homens é  $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$  e o total de partidas é  $\frac{3n \cdot (3n-1)}{2}$ . Agora, como as partidas entre os homens representam 10% do total, segue:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}{\frac{3n \cdot (3n-1)}{2}} &= \frac{10}{100} \\ \frac{n \cdot (n-1)}{3n \cdot (3n-1)} &= \frac{1}{10} \\ \frac{(n-1)}{3 \cdot (3n-1)} &= \frac{1}{10} \\ 10n-10 &= 9n-3 \\ n &= 7 \end{aligned}$$

**41.** (Extraído do vestibular da FPS PE - 2014)

Seja  $x$  a quantidade de água com princípio ativo em concentração de 20%, o que resulta em  $0,20x$  do princípio ativo. Como é preciso 100 ml, a quantidade de composto em concentração de 30% será  $(100-x)$ , o que resulta em  $0,30(100-x)$  de princípio ativo. Como deseja-se um composto de 100 ml com concentração de 24%, fica-se com  $0,24 \cdot 100 = 24$  ml do princípio ativo. Portanto,

$$\begin{aligned} 0,2x + 0,3(100-x) &= 0,24 \cdot 100 \\ 0,2x - 0,3x + 30 &= 24 \\ -0,1x &= -6 \\ x &= 60 \end{aligned}$$

Resposta: 60 ml do composto com concentração de 20%.

<sup>1</sup>Entre  $k$  objetos, existem  $\frac{k(k-1)}{2}$  subconjuntos de dois elementos. Para ver isso, basta usar o princípio multiplicativo e notar que dentre as  $k(k-1)$  maneiras de escolhermos dois objetos distintos, cada subconjunto de dois elementos foi representado duas vezes.

**42.** Se forem três meses de variação teremos que três vezes incidiu o fator de variação de  $(1+i)$ , ou seja, no acumulado  $(1+i)^3$ . Se houve queda de 27,1%, então o faturamento atual é 72,9% do inicial. Sendo assim,

$$\begin{aligned}(1+i)^3 \cdot 100\% &= 72,9\% \\ (1+i)^3 &= \frac{72,9}{100} \\ (1+i)^3 &= \frac{729}{1000} \\ 1+i &= \sqrt[3]{\frac{729}{1000}} \\ i &= \frac{9}{10} - 1 \\ i &= -0,1 \\ i &= -10\%.\end{aligned}$$

A cada mês houve uma perda média de 10%. Para o 4º mês de queda basta calcularmos o fator  $1-i = 1-0,1 = 0,9$  com o faturamento atual (3º mês), que perfaz

$$0,9 \cdot 0,729 = 0,6561 = 65,61\%.$$

Por fim, o faturamento ficou  $1 - 65,61\% = 34,39\%$  menor após o 4º mês.

**43.** (Extraído da OBM)

Sejam  $A$ ,  $G$  e  $L$  as quantidades de questões de álgebra, geometria e lógica. Sabendo que ele acertou  $70\% \cdot G$  e  $80\% \cdot L$  questões de geometria e lógica, respectivamente, o percentual de questões respondidas corretamente incluindo esses dois assuntos é  $\frac{0,7G + 0,8L}{G + L}$ . Como o percentual anterior deve ser igual a 74%, temos:

$$\begin{aligned}\frac{0,7G + 0,8L}{G + L} &= \frac{74}{100} \\ 0,04G &= 0,06L \\ G &= \frac{3L}{2}.\end{aligned}$$

Da mesma forma, como ele acertou  $50\% \cdot A$  questões de álgebra, também podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{0,5A + 0,8L}{A + L} &= \frac{62}{100} \\ 18L &= 12A \\ A &= \frac{3L}{2}.\end{aligned}$$

A porcentagem de questões respondidas corretamente é:

$$\begin{aligned}\frac{0,5A + 0,7G + 0,8L}{A + G + L} &= \frac{0,5 \cdot \frac{3}{2}L + 0,7 \cdot \frac{3}{2}L + 0,8L}{\frac{3}{2}L + \frac{3}{2}L + L} \\ &= \frac{2,6}{4} \\ &= 65\%.\end{aligned}$$

**44.** (Adaptado da Olimpíada de Matemática da Rússia) Sejam  $p$  e  $s$  os preços iniciais do pão e do copo de suco, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned}p + s &= 1 \\ p &= 1 - s\end{aligned}$$

Após a primeira inflação os preços se tornam:

$$\begin{aligned}1,2 \cdot \frac{p}{2} + 1,2s &= 1 \\ 0,6p + 1,2s &= 1 \\ 0,6(1-s) + 1,2s &= 1 \\ 0,6 - 0,6s + 1,2s &= 1 \\ 0,6s &= 0,4 \\ 6s &= 4 \\ s &= \frac{4}{6} \\ s &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

O preço do suco após a segunda inflação ficará:

$$\begin{aligned}s &= \frac{2}{3} \cdot (1,2)^2 \\ s &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{12}{10}\right)^2 \\ s &= \frac{2}{3} \cdot \frac{144}{100} \\ s &= \frac{288}{300} < 1.\end{aligned}$$

Logo, é possível que Lomonosov possa comprar ao menos um copo de suco com um dinar.

**45.** Sim, é possível. Considere uma empresa com 100 funcionários e consistindo apenas de dois departamentos: um com 10 funcionários que recebem 90% de todos os salários e outro com 90 funcionários recebendo os 10% restantes. Em cada departamento, distribua salários iguais para todos os funcionários. Em cada departamento, quaisquer 10% dos funcionários ganham exatamente 10% < 11% do dinheiro gasto com salários em tal departamento.