Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos

Soma e Produto de Funções Polinomiais Complexas

3° ano E.M.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos
Soma e Produto de Funções Polinomiais Complexas

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Sejam $P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$ e $Q(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1$, determine:

a) $P + Q$.

b) $P - Q$.

c) $P \cdot Q$.

Exercício 2. Qual o valor de $a \in \mathbb{R}$ para que o grau de $P(x) + Q(x)$ seja uma função polinomial do 2^o grau, sendo $P(x) = (a-1)x^3 + 3x^2 + 5x - 2$ e $Q(x) = (a-3)x^3 - x^2 + 2$?

a) -2.

b) -1.

c) 0.

d) 1.

e) 2.

Exercício 3. Seja $P(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 4$ e $R(x) = x^2 + 5x - 2$. Determine:

a) $P(0) + R(1)$.

b) $P(1) + R(0)$.

c) $P(i) - R(i)$.

Exercício 4. Verifique quais dos números 1, 3, i e $1 + i$ são raízes de $P(x) \cdot Q(x)$, sendo $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ e $Q(x) = 3x^3 - x^2 + x$.

Exercício 5. Sejam $R(x) = x^2 - 2x + 1$, $S(x) = 2x^2 + x - 3$ e $T(x) = x^2 - 4$. Determine $2R(x) - iS(x) - T(x)$.

Exercício 6. Qual o coeficiente de x^3, no produto entre $A(x) = ix^3 + 2ix^2 - x + 2$ e $B(x) = x^2 + 2ix - i$?

a) -4.

b) $-i$.

c) 0.

d) i.

e) 4.

Exercício 7. Qual a soma dos coeficientes da função polinomial resultante do produto $(x^4 - 2x^3 + 5x - 1)(x^3 + 7x - 2)$?

a) 17.

b) 18.

c) 19.

d) 20.

e) 21.

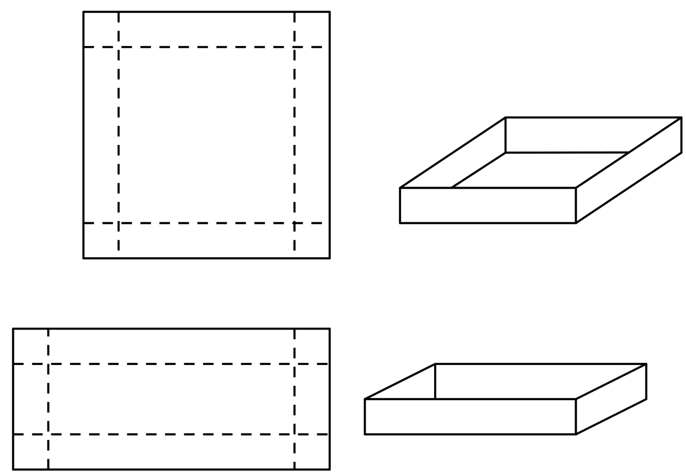
2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Cortando-se quadrados em cada canto de uma folha de papelão quadrada e outra retangular, com 18 cm de lado e a outra 12 cm por 24 cm, dobrando-se conforme a figura, obtém-se duas caixas sem tampa. Supondo que a medida dos lados dos quadrados recortados seja x, determine:

a) A soma dos volumes das caixas.

b) A soma das áreas das caixas.

c) A caixa com maior volume para $x = 5$ cm.



Exercício 9. Sejam as funções polinomiais $P(x) = m^2x^3 + (m-1)x^2$ e $Q(x) = x^2 + x + 1$. Para que valor real de m, a função $H(x) = P(x) \cdot Q(x)$ tem grau 4?

a) 3.

b) 2.

c) 1.

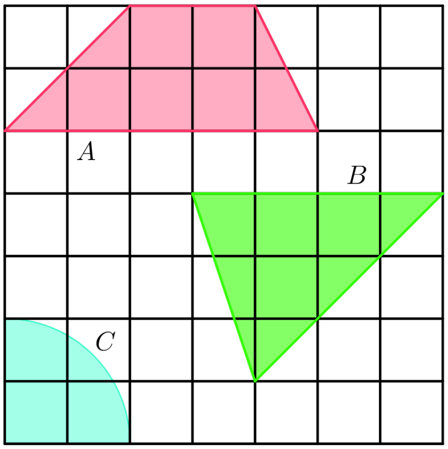
d) 0.

e) -1.

Exercício 10. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ tais que $f(x) = ax^2 + (b-1)x + 3$ e $g(x) = bx^2 + (-a+2)x - 1$. Determine a e b de modo que $f(x) + g(x)$ seja independente de x.

Exercício 11. Dados os polinômios $P(x) = 3x^4 + 2x^3 - x$ e $Q(x) = (m+n)x^4 + 2x^3 + (m-2n)x^2 - x$, determine m e n, sabendo que $P(x) - Q(x) = 0$.

Exercício 12. No quadriculado abaixo, os lados dos quadradinhos medem x. Determine, em função de x, a soma das áreas das figuras geométricas.



Exercício 13. Considere $A(x) = 2x^2 + ax + b$, $B(x) = 4x + 2$, $C(x) = x + b$ e $D(x) = 8x^3 + (17 + b)x^2 + 3x - a$. Determine a e b, tais que $A(x) \cdot B(x) + C(x) = D(x)$.

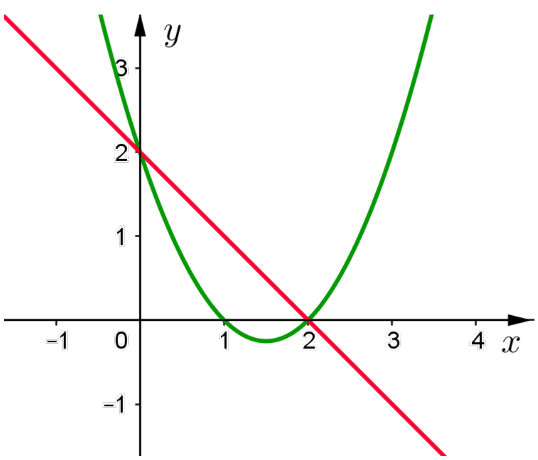
Exercício 14. São dadas as funções polinomiais $P(x) = (m^2 - 4)x^3 + mx^2 - 3x + 5$ e $Q(x) = -2x^2 + 5x + 6$.

a) Calcule $P(x) + Q(x)$.

b) Discuta em função de m o grau do polinômio $P(x) + Q(x)$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Na figura, temos os gráficos das funções $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = dx + e$. Construa o gráfico de $f(x) + g(x)$.



Exercício 16. Sejam $p(x) = ax^2 + (a - 15)x + 1$ e $q(x) = 2x^2 - 3x + \frac{1}{b}$ polinômios com coeficientes reais. Sabe-se que esses polinômios possuem as mesmas raízes. Então, é correto afirmar que o valor de $a + b$ é:

a) 3.

b) 6.

c) 9.

d) 12.

e) 30.

Exercício 17. Se a expressão algébrica $x^2 + 9$ se escreve identicamente como $a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$ onde a, b e c são números reais, então o valor de $a - b + c$ é:

a) 9.

b) 10.

c) 12.

d) 13.

Exercício 18. Os valores de R, P e A para que a igualdade $\frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 - x} = \frac{R}{x} + \frac{P}{x + 1} + \frac{A}{x - 1}$ seja uma identidade são, respectivamente:

a) 3, 1 e -2.

b) 1, -2 e 3.

c) 3, -2 e 1.

d) 1, 3 e -2.

e) -2, 1 e 3.

Exercício 19. Determine o polinômio com coeficientes reais $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, tal que $p(x + 1) - p(x) = 6x^2$ e indique $a^2 + b^2 + c^2$.

Exercício 20. Um gato está procurando um rato escondido em algum ponto do plano cartesiano. O rato, um adorador de polinômios, escolheu um lugar com algumas propriedades:

1) Dadas 3 funções polinomiais $f(x) = -2x^4 + 3x - 1$, $g(x) = x - 1$ e $h(x) = 3x^3 - 3x^2 - 2x + 2$, você deve gerar uma expressão com somas e produtos que envolve as 3 funções dadas, por exemplo $f + g + h$ ou $f \cdot h + g$.

2) Essa expressão deve ter grau menor que 6.

Dentre as expressões possíveis, o rato está escondido na função $p(x)$ que possui maior valor de $p(0)$. Descubra o ponto $(0, p(0))$ que o rato está escondido.

ELABORADO POR CLEBER ASSIS E TIAGO MIRANDA
PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM

Respostas e Soluções.

1.

a) $P + Q = 3x^3 + 4x - 2$.

b) $P - Q = -x^3 + 4x^2 - 2x - 4$.

c) $P \cdot Q = 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 + x^3 + 4x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x - 6x^3 + 6x^2 - 9x - 3 = 2x^6 + 2x^5 + x^4 - x^3 + 11x^2 - 8x - 3$.

2. Para que o grau seja 2, o coeficiente do termo de x^3 deve ser zero. Temos, então $(a-1) + (a-3) = 0$, segue que $a = 2$. Resposta E.

3.

a) $P(0) + R(1) = (0^4 - 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 4) + (1^2 + 5 \cdot 1 - 2) = 4 + 4 = 8$.

b) $P(1) + R(0) = (1^4 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 4) + (0^2 + 5 \cdot 0 - 2) = 6 - 2 = 4$.

c) $P(i) - R(i) = (i^4 - 2 \cdot i^2 + 3 \cdot i + 4) - (i^2 + 5 \cdot i - 2) = (1 + 2 + 3i + 4) - (-1 + 5i - 2) = 10 - 2i$.

4. Para que seja raiz de $P(x) \cdot Q(x)$, deve ser raiz de $P(x)$ ou $Q(x)$. Verificando quais são raízes de $P(x)$, temos: $P(1) = 1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 0$; $P(3) = 3^3 - 3^2 + 3 - 1 = 20$; $P(i) = i^3 - i^2 + i - 1 = -i + 1 + i - 1 = 0$; $P(1+i) = (1+i)^3 - (1+i)^2 + (1+i) - 1 = 1 + 3i - 3 - i - 1 - 2i + 1 + 1 + i - 1 = -2 + i$.
Vemos que 1 e i são raízes de $P(x)$. Para $Q(x)$, basta analisarmos 3 e $1+i$:
$Q(3) = 3 \cdot 3^3 - 3^2 + 3 = 75$; $Q(1+i) = 3 \cdot (1+i)^3 - (1+i)^2 + (1+i) = 3(1 + 3i - 3 - i) - 1 - 2i + 1 + 1 + i = -5 + 5i$.
Portanto, apenas 1 e i são raízes de $P(x) \cdot Q(x)$.

5.

$$\begin{aligned} 2R(x) - iS(x) - T(x) &= \\ 2(x^2 - 2x + 1) - i(2x^2 + x - 3) - (x^2 - 4) &= \\ 2x^2 - 4x + 2 - 2ix^2 - ix + 3i - x^2 + 4 &= \\ (1 - 2i)x^2 - (4 + i)x + (6 + 3i). \end{aligned}$$

6. Para encontrarmos o coeficiente de x^3, basta multiplicarmos apenas os termos que resultem em kx^3. Assim, temos $ix^3 \cdot (-i) + 2ix^2 \cdot 2ix + (-x) \cdot x^2 = x^3 - 4x^3 - x^3 = -4x^3$. Portanto, o coeficiente de x^3 é -4. Resposta A.

7. Para obtermos a soma dos coeficientes de uma função polinomial, basta substituirmos por 1 a sua variável. No caso de produto de duas funções, esta substituição pode ser feita antes ou depois da multiplicação. Temos, então $(1^4 - 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1 - 1)(1^3 + 7 \cdot 1 - 2) = 18$. Resposta B.

8.

a) As dimensões da primeira caixa são $(18 - 2x, (18 - 2x)$ e x e da segunda caixa são $(24 - 2x)$, $(12 - 2x)$ e x, sendo todas essas medidas em cm. temos então:

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &= x(18 - 2x)^2 + x(24 - 2x)(12 - 2x) \\ &= 4x^3 - 72x^2 + 324x + 4x^3 - 72x^2 + 288x \\ &= 8x^3 - 144x^2 + 612x. \end{aligned}$$

b) A área de cada caixa é a área de papelão menos $4x^2$. Assim, a soma das áreas é $18^2 - 4x^2 + 12 \cdot 24 - 4x^2 = 612 - 8x^2$.

c) $V_1(5) = 8 \cdot 8 \cdot 5 = 320\ cm^2$ e $V_2(5) = 2 \cdot 14 \cdot 5 = 140\ cm^2$. Portanto, a primeira caixa (folha quadrada) tem maior volume.

9. Temos:

$$\begin{aligned} H(x) &= \\ P(x) \cdot Q(x) &= \\ (m^2x^3 + (m-1)x^2)(x^2 + x + 1) &= \\ m^2x^5 + (m^2x + m - 1)x^4 + (m^2 + m - 1)x^3 + (m-1)x^2. \end{aligned}$$

Sendo assim, para que $H(x)$ tenha grau 4, devemos ter $m^2 = 0$, ou seja $m = 0$. Dessa forma, teremos $H(x) = -x^4 - x^3 - x^2$, que tem grau 4. Resposta D.

10. (Extraído da Vídeo Aula) $f(x) + g(x) = (a+b)x^2 + (b - 1 - a + 2)x + 2$, que, para ser independente de x, devemos ter:

$$\begin{cases} a + b &= 0 \\ b - 1 - a + 2 &= 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b &= 0 \\ -a + b &= -1. \end{cases}$$

Somando as equações, chegamos a $2b = -1$, segue que $b = -\dfrac{1}{2}$ e, consequentemente, $a = \dfrac{1}{2}$.

11. Se $P(x) - Q(x) = 0$, então a diferença de cada termo de mesmo grau deve gerar um coeficiente nulo. Temos então:

$$\begin{cases} 3 - (m+n) &= 0 \\ -(m - 2n) &= 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m + n &= 3 \\ -m + 2n &= 0. \end{cases}$$

Somando as equações chegamos a $n = 1$ e, consequentemente, $m = 2$.

12. Temos que $A_A = \dfrac{(2x + 5x)2x}{2} = 7x^2$, $A_B = \dfrac{4x \cdot 3x}{2} = 6x^2$ e $A_C = \dfrac{\pi(2x)^2}{4} = \pi x^2$, donde obtemos a soma S das áreas: $S = 7x^2 + 6x^2 + \pi x^2 = (13 + \pi)x^2$.

13. Inicialmente temos que $A(x)\cdot B(x) = (2x^2+ax+b)(4x+2) = 8x^3+4x^2+4ax^2+2ax+4bx+2b$, que, somando com $C(x)$, chegamos a $8x^3+4x^2+4ax^2+2ax+4bx+x+3b$. Para que este resultado seja igual a $D(x)$, devemos ter cada termo igual ao termo correspondente (de mesmo grau) em $D(x)$, ou seja, termo com x^3 igual a termo com x^3, termo com x^2 igual a termo com x^2, e assim por diante. Temos então:

$$\begin{cases} 4+4a &= 17+b \\ 2a+4b+1 &= 3 \\ -a &= 3b. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por (-2), obtemos:

$$\begin{cases} 4a-b &= 13 \\ -4a-8b &= -4 \\ a+3b &= 0. \end{cases}$$

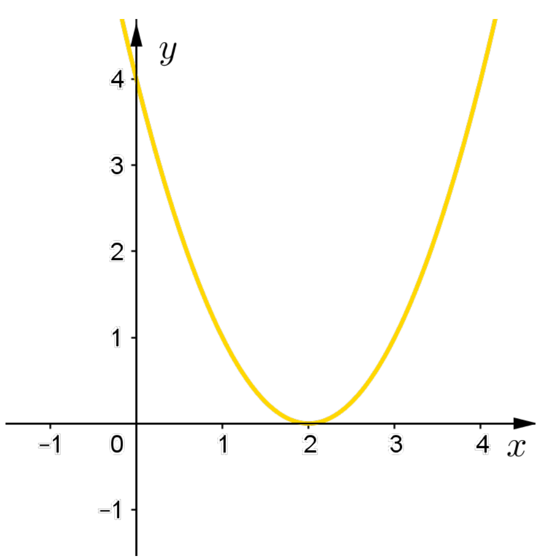
Somando as duas primeiras equações, chegamos a $b=-1$ e, consequentemente, $a=3$.

14.

a) $P(x)+Q(x) = (m^2-4)x^3+(m-2)x^2+2x+11$.

b) Se $m^2-4 \neq 0$, ou seja, $m \neq -2$ e $m \neq 2$, o grau de $P(x)+Q(x)$ é 3; se $m=-2$, o grau é 2; e se $m=2$, o grau é 1.

15. Na função $g(x) = dx+e$, a interseção com eixo y é 2 e a declividade é -1, então $g(x) = -x+2$; na função $f(x) = ax^2+bx+c$, as raízes são 1 e 2, então $f(x) = a(x-1)(x-2) = ax^2-3ax+2a$ e como a interseção com o eixo y é 2, então $a=1$, donde $f(x) = x^2-3x+2$. Por fim, temos que $f(x)+g(x) = x^2-4x+4$, cujo gráfico é:



16. (Extraído da UFMG) Como eles possuem as mesmas raízes, então a soma das raízes de cada um também é a mesma, ou seja, $\dfrac{-(a-15)}{a} = \dfrac{-(-3)}{2}$, donde $a=6$. Da mesma forma, temos que o produto das raízes é o mesmo também, ou seja, $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2b}$, segue que $b=3$. Portanto, $a+b=9$. Resposta C.

17. (Extraído da UECE - 2015) Desenvolvendo a segunda expressão, temos $a(x+1)^2+b(x+1)+c = ax^2+(2a+b)x+(a+b+c)$. Igualando cada termo a seu correspondente de mesmo grau da outra expressão, temos:

$$\begin{cases} a &= 1 \\ 2a+b &= 0 \\ a+b+c &= 9. \end{cases}$$

Portanto, $a=1$, $b=-2$ e $c=10$, ou seja, $a-b+c=13$. Resposta D.

18. (Extraído da Mackenzie - 2017) Temos:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2+5x-1}{x^3-x} &= \frac{R}{x}+\frac{P}{x+1}+\frac{A}{x-1} \\ \frac{2x^2+5x-1}{x^3-x} &= \frac{R(x^2-1)+P(x^2-x)+A(x^2+x)}{x^3-x} \\ 2x^2+5x-1 &= Rx^2-R+Px^2-Px+Ax^2+Ax \\ 2x^2+5x-1 &= (R+P+A)x^2+(-P+A)x-R \end{aligned}$$

Da igualdade polinomial, temos:

$$\begin{cases} R+P+A &= 2 \\ A-P &= 5 \\ -R &= -1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, chegamos a $R=1$, $A=3$ e $P=-2$. Resposta B.

19. (Extraído da UFPE - 2013) Se $p(x+1) = p(x)+6x^2$, então $a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1) = ax^3+bx^2+cx+6x^2$, segue que $ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+(a+b+c) = ax^3+(b+6)x^2+cx$. Igualando cada termo ao correspondente do mesmo grau do outro polinômio, temos:

$$\begin{cases} 3a+b &= 6+b \\ 3a+2b+c &= c \\ a+b+c &= 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, chegamos a $a=2$, $b=-3$ e $c=1$. Portanto, $p(x) = 2x^3-3x^2+x$ e $a^2+b^2+c^2 = 14$.

20. (Extraído do Aplicativo do Portal da Matemática) Temos 5 possibilidades para $p(x)$:

a) $p(x) = f(x) + g(x) + h(x)$, sendo $p(0) = 0$.

b) $p(x) = f(x) + g(x) \cdot h(x)$, sendo $p(0) = -3$.

c) $p(x) = f(x) \cdot g(x) + h(x)$, sendo $p(0) = 3$.

d) $p(x) = f(x) \cdot h(x) + g(x)$, que não pode ser, pois o grau não é menor que 6.

e) $p(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$, que não pode ser, pois o grau não é menor que 6.

Temos, portanto, que o rato está escondido no ponto $(0, 3)$.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com