Equações Algébricas – Raízes e Coeficientes

Fórmulas Resolutivas – Segundo Método

Portal da Matemática
OBMEP

Material elaborado por Letícia Mattos.

Equações Algébricas – Raízes e Coeficientes
Fórmulas Resolutivas – Segundo Método

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Para cada um dos itens a seguir, escreva as expressões como uma multiplicação de polinômios de primeiro grau:

(a) $x^4 + 2x^2 + 1$

(b) $x^4 - 5x^2 + 6$

(c) $x^4 - 20x^2 + 64$

Exercício 2. Para cada um dos itens a seguir, encontre todas as soluções para a equação:

(a) $x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x + 6 = 0.$

(b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4 = 0.$

(c) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 15 = 0.$

Dica: substitua x por $y + t$ em cada uma das equações e encontre o valor de t para o qual o termo cúbico é eliminado.

Exercício 3. Sabendo-se que i é uma solução da equação

$$x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 5x - 6 = 0,$$

encontre as demais soluções.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Encontre todas as soluções para a equação

$$x^4 - 2x^2 - 12x - 8 = 0$$

Exercício 5. Considere o polinômio P dado por

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 12x + 9$$

(a) Encontre o valor T para o qual o polinômio Q dado por $Q(x) = P(x + T)$ não possua termo cúbico.

(b) Encontre as raízes de Q e, em seguida, as raízes de P.

Exercício 6. Sejam a e b números reais que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 183 \\ b\sqrt{a} + a\sqrt{b} = 182. \end{cases}$$

Calcule $a + b$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 7. Encontre todas as raízes da equação

$$x^9 - 2022x^3 + \sqrt{2021} = 0.$$

Exercício 8. Encontre todos os valores de x que satisfazem a equação

$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3} = \frac{7}{8}.$$

Exercício 9. Encontre todos os valores $x, y \in \mathbb{N}$ que satisfazem a equação

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{108}.$$

Respostas e Soluções.

1.

(a) Para escrever a expressão $x^4 + 2x^2 + 1$ como uma múltiplicação de polinômios de primeiro grau, basta encontrarmos as raízes de $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ e suas respectivas multiplicidades. Para isso, primeiro 'reduzimos' a expressão de quarto grau para uma expressão em segundo grau. Seja $y = x^2$. O polinômio $x^4 + 2x^2 + 1$ pode ser escrito como $y^2 + 2y + 1$, que por sua vez é igual a

$$y^2 + 2y + 1 = (y + 1)^2.$$

Portanto, temos que a equação $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ é equivalente a

$$(x^2 + 1)^2 = 0 \iff x^2 = -1.$$

As raízes dessa equação são i e $-i$. Portanto, nossa equação pode ser fatorada como

$$(x - i) \cdot (x - i) \cdot (x + i) \cdot (x + i).$$

(b) Aqui, repetimos o mesmo raciocínio usado no item (a), só que para o polinômio $x^4 - 5x^2 + 6$. Seja $y = x^2$. O polinômio $x^4 - 5x^2 + 6$ pode ser escrito como $y^2 - 5y + 6$, que por sua vez é igual a

$$y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3).$$

Portanto, temos que a equação $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ é equivalente a

$$(x^2 - 2)(x^2 - 3) = 0$$

As raízes dessa equação são $\pm\sqrt{2}$ e $\pm\sqrt{3}$. Portanto, nossa equação pode ser fatorada como

$$(x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3}).$$

(c) Novamente, repetimos o mesmo raciocínio usado nos itens (a) e (b), só que para o polinômio $x^4 - 20x^2 + 64$. Seja $y = x^2$. O polinômio $x^4 - 20x^2 + 64$ pode ser escrito como $y^2 - 20y + 64$, que por sua vez é igual a

$$y^2 - 20y + 64 = (y - 16)(y - 4).$$

Portanto, temos que a equação $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ é equivalente a

$$(x^2 - 16)(x^2 - 4) = 0$$

As raízes dessa equação são ± 2 e ± 4. Portanto, nossa equação pode ser fatorada como

$$(x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x - 4) \cdot (x + 4).$$

2.

(a) Substituindo x por $y + t$ na expressão $x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x + 6$, ficamos com

$$(y + t)^4 - 4(y + t)^3 + 9(y + t)^2 - 10(y + t) + 6 \qquad (1)$$

Acima, os únicos binômios que geram termos cúbicos na variável y são $(y + t)^4$ e $(y + t)^3$. Assim, segue que o termo cúbico da expressão (1) na variável y é igual a $(4t - 4)y^3$. Podemos ver que o termo cúbico desaparece se $4t - 4 = 0 \iff t = 1$. Logo, se $x = y + 1$, então

$$y^4 + 3y^2 + 2 = 0.$$

Por outro lado, a equação acima é equivalente a

$$(y^2 + 2)(y^2 + 1) = 0,$$

cujas soluções são $\pm i$ e $\pm i\sqrt{2}$. Como $x = y + 1$, segue que as soluções da nossa equação inicial são $1 \pm i$ e $1 \pm i\sqrt{2}$.

(b) Substituindo x por $y + t$ na expressão $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4$, ficamos com

$$(y + t)^4 + 4(y + t)^3 + 4(y + t)^2 - 4 \qquad (2)$$

Acima, os únicos binômios que geram termos cúbicos na variável y são $(y + t)^4$ e $(y + t)^3$. Assim, segue que o termo cúbico da expressão (2) na variável y é igual a $(4t + 4)y^3$. Podemos ver que o termo cúbico desaparece se $4t + 4 = 0 \iff t = -1$. Logo, se $x = y - 1$, então

$$y^4 - 2y^2 - 3 = 0.$$

Por outro lado, a equação acima é equivalente a

$$(y^2 - 3)(y^2 + 1) = 0$$

cujas soluções são $\pm i$ e $\pm\sqrt{3}$. Como $x = y - 1$, segue que as soluções da nossa equação inicial são $-1 \pm i$ e $-1 \pm \sqrt{3}$.

(c) Substituindo x por $y + t$ na expressão $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 15$, ficamos com

$$(y + t)^4 - 8(y + t)^3 + 24(y + t)^2 - 32x + 15 \qquad (3)$$

Acima, os únicos binômios que geram termos cúbicos na variável y são $(y + t)^4$ e $(y + t)^3$. Assim, segue que o termo cúbico da expressão (3) na variável y é igual a $(4t - 8)y^3$. Podemos ver que o termo cúbico desaparece se $4t - 8 = 0 \iff t = 2$. Logo, se $x = y + 2$, então

$$y^4 - 1 = 0$$

Por outro lado, a equação acima é equivalente a

$$(y^2 - 1)(y^2 + 1) = 0$$

cujas soluções são $\pm i$ e ± 1. Como $x = y + 2$, segue que as soluções da nossa equação inicial são $2 \pm i$, 1 e 3.

3. Se i é solução da equação, então $-i$ também é solução da equação. Mais geralmente, se P é um polinômio e $P(x+iy) = 0$, com $x, y \in \mathbb{R}$, então temos $P(x-yi) = 0$.
Como i e $-i$ são raízes, podemos escrever

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 5x - 6 &= (x-i)(x+i)(x^2+bx+c) \\ &= (x^2+1)(x^2+bx+c), \end{aligned}$$

onde $b, c \in \mathbb{C}$. Expandindo o produto do lado direito acima, obtemos a expressão

$$x^4 + bx^3 + (c+1)x^2 + bx + c.$$

Comparando termo a termo o polinômio acima com $x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 5x - 6$ obtemos $b = -5$ e $c = -6$. Assim, segue que a equação $x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 5x - 6 = 0$ é equivalente a

$$\begin{gathered} (x-i)(x+i)(x^2-5x-6) = 0 \iff \\ (x-i)(x+i)(x+1)(x-6) = 0. \end{gathered}$$

Concluímos que as outras raízes da equação são $-i$, -1 e 6.

4. Queremos transformar a nossa equação em uma equação da forma $(x^2+bx+c)^2 - (dx+e)^2 = 0$. Equações desse tipo são mais simples de resolver porque podemos usar o produto notável para a diferença de quadrados. Assim, seja $x^4 - 2x^2 - 12x - 8 = (x^2+bx+c)^2 - (dx+e)^2$. Expandindo os produtos e agrupando as expressões, chegamos no sistema

$$\begin{cases} b = 0 \\ 2c - d^2 = -2 \\ de = 6 \\ c^2 - e^2 = -8. \end{cases}$$

Assim, temos que

$$e^2 = \frac{36}{d^2} = \frac{18}{c+1}.$$

Pela última equação do sistema, segue que

$$c^2(c+1) - 18 = -8(c+1) \iff c^3 + c^2 + 8c - 10 = 0.$$

Observe que $c = 1$ é solução da equação acima. Substituindo esse valor de c no sistema, encontramos $|e| = 3$ e $|d| = 2$. Segue que

$$x^4 - 2x^2 - 12x - 8 = (x^2+1)^2 - (2x+3)^2$$

e logo

$$\begin{gathered} (x^2+1)^2 - (2x+3)^2 = 0 \iff \\ (x^2+2x+4)(x^2-2x-2) = 0. \end{gathered}$$

Quando $x^2 + 2x + 4 = 0$, obtemos as soluções $-1 \pm i\sqrt{3}$. Quando $x^2 - 2x - 2 = 0$, obtemos as soluções $1 \pm \sqrt{3}$. Assim, concluímos que as soluções para a equação $x^4 - 2x^2 - 12x - 8 = 0$ são

$$-1 - i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3}, -1 - \sqrt{3} \text{ e } -1 + \sqrt{3}.$$

5.

(a) Note que $P(x+T)$ é dado pela expressão

$$(x+T)^4 - 4(x+T)^3 + 13(x+T)^2 - 12(x+T) + 9.$$

Acima, os únicos binômios que geram termos cúbicos na variável x são $(x+T)^4$ e $(x+T)^3$. Assim, segue que o termo cúbico da expressão acima na variável x é igual a $(4T-4)x^3$. Podemos ver que o termo cúbico desaparece se $4T - 4 = 0 \iff T = 1$. Assim, $P(x+1)$ não possui termo cúbico.

(b) Como $Q(x) = P(x+1)$, temos

$$Q(x) = x^4 + 7x^2 + 6x + 7.$$

Queremos transformar a equação $Q(x) = 0$ em uma equação da forma $(x^2+b)^2 - (cx+d)^2 = 0$ (observação: como $Q(x)$ não possui termo cúbico, não há necessidade de considerar o termo linear em x no primeiro binômio). Equações desse tipo são mais simples de resolver porque podemos usar o produto notável para a diferença de quadrados. Assim, seja

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x^2+b)^2 - (cx+d)^2 \\ &= x^4 + (2b - c^2)x^2 - 2cdx + b^2 - d^2. \end{aligned}$$

Comparando termo a termo, chegamos no sistema

$$\begin{cases} 2b - c^2 = 7 \\ cd = -3 \\ b^2 - d^2 = 7. \end{cases}$$

Assim, temos que

$$d^2 = \frac{9}{c^2} = \frac{9}{2b-7}.$$

Pela última equação do sistema, segue que

$$b^2 - \frac{9}{2b-7} = 7,$$

que é equivalente a

$$2b^3 - 7b^2 - 14b + 40 = 0.$$

Testando os divisores de 40, podemos ver que 2 e 4 são raízes da equação acima. Vamos escolher $b = 4$. Substituindo esse valor de b no sistema, temos que uma das soluções é dada por $c = 1$ e $d = -3$. Observação: também poderíamos ter escolhido $b = 2$ e, neste caso, encontraríamos $c = d = i\sqrt{3}$. Convidamos o leitor a refazer as contas com esses valores.

Assim, podemos escrever

$$Q(x) = (x^2+4)^2 - (x-3)^2.$$

Segue que $Q(x) = 0$ se e somente se

$$(x^2+x+1)(x^2-x+7) = 0.$$

Quando $x^2+x+1=0$, obtemos as soluções $-1/2\pm i\sqrt{3}/2$. Quando $x^2-x+7=0$, obtemos as soluções $1/2\pm 3i\sqrt{3}/2$. Assim, concluímos que as soluções para a equação $Q(x)=0$ são

$$-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}-\frac{3i\sqrt{3}}{2} \text{ e } \frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Como $Q(x)=P(x+1)$, concluímos que as soluções para $P(x)=0$ são

$$\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{2}-\frac{3i\sqrt{3}}{2} \text{ e } \frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

6. Vamos fazer duas substituições. Seja $x=\sqrt{a}$ e $y=\sqrt{b}$. Assim, ficamos com

$$\begin{cases} x^3+y^3=183 \\ y^2x+x^2y=182. \end{cases}$$

Agora, veja que

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= x^3+y^3+3(x^2y+y^2x)\\ &= 183+3\cdot 182\\ &= 729\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $x+y=9$. Combinando essa equação com $y^2x+x^2y=182$, obtemos

$$xy(x+y)=182 \Rightarrow xy=\frac{182}{9}.$$

Usando a identidade $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, segue que

$$81=x^2+y^2+2\cdot\frac{182}{9}.$$

Concluímos que

$$\begin{aligned}a+b &= x^2+y^2\\ &= \frac{365}{9}.\end{aligned}$$

7. Seja $a=\sqrt{2021}$. Assim, nossa equação pode ser escrita como

$$x^3a^2-a+x^3-x^9=0.$$

Vamos solucionar essa equação na variável a. Pela Fórmula de Bhaskara, temos que

$$a=\frac{1\pm\sqrt{4x^{12}-4x^6+1}}{2x^3}.$$

Agora, note que $4x^{12}-4x^6+1=(2x^6-1)^2$. Assim, ficamos com

$$\begin{aligned}a &= \frac{1\pm|2x^6-1|}{2x^3}\\ &= \frac{1\pm(2x^6-1)}{2x^3}.\end{aligned}$$

Assim, temos as seguintes soluções:

$$a=x^3 \qquad \text{ou} \qquad a=\frac{1-x^6}{x^3}.$$

A primeira equação nos dá as soluções

$$(2021)^{1/6},\ (2021)^{1/6}e^{2\pi i/3} \text{ e } (2021)^{1/6}e^{4\pi i/3}.$$

A segunda equação é equivalente a $x^6+ax^3-1=0$. Seja $y=x^3$. Assim, temos $y^2+ay-1=0$ e então

$$\begin{aligned}y &= \frac{-\sqrt{2021}\pm\sqrt{a^2+4}}{2}\\ &= \frac{-\sqrt{2021}\pm 45}{2}.\end{aligned}$$

Denote por $\alpha=(-\sqrt{2021}+45)/2$ e $\beta=(-\sqrt{2021}-45)/2$. Assim, as soluções são

$$\begin{aligned}&\alpha^{1/3},\ \alpha^{1/3}e^{2\pi i/3} \text{ e } \alpha^{1/3}e^{4\pi i/3},\\ &\beta^{1/3},\ \beta^{1/3}e^{2\pi i/3} \text{ e } \beta^{1/3}e^{4\pi i/3}.\end{aligned}$$

8. Primeiro, vamos fazer a substituição $a=1/x$ e $b=1/(x+1)$. Assim, obtemos

$$a^3-b^3=\frac{7}{8}.$$

Note também que

$$\begin{aligned}\frac{1}{b}-\frac{1}{a} &= x+1-x\\ &= 1.\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $a-b=ab$ e ficamos com o sistema

$$\begin{cases} a^3-b^3=\dfrac{7}{8} \\ a-b=ab \end{cases}$$

Agora, veja que

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\\ &= a^3-b^3-3ab(a-b)\\ &= \frac{7}{8}-3(ab)^2\end{aligned}$$

Como $a-b=ab$, temos que

$$(ab)^3+3(ab)^2-\frac{7}{8}=0$$

Isso é nada mais que uma equação do terceiro grau em ab. Assim, seja $x=ab$. Temos

$$8x^3+24x^2-7=0.$$

Vamos trocar de variável mais uma vez para transformar o coeficiente do termo cúbico em 1. Seja $y=2x$. Segue que

$$y^3+6y^2-7=0.$$

Testando os divisores de 7 como possíveis candidatos a uma solução, vemos que $y = 1$ é uma solução. Assim, o polinômio $y^3 + 6y^2 - 7$ é divisível por $y - 1$ e podemos escrever

$$y^3 + 6y^2 - 7 = (y-1)(y^2 + 7y + 7)$$

Então, ou $y = 1$ ou y é raíz da equação $y^2 + 7y + 7 = 0$. Observe que se y é raíz dessa última equação, então y deve ser negativo. Agora, lembre-se que y é positivo! De fato, temos

$$y = 2x = 2ab = 2(a-b).$$

Como $a^3 - b^3 > 0$, segue que $a > b$ e então $y > 0$. Assim, concluímos que y é de fato igual a 1. Logo, segue que

$$\begin{cases} ab = \frac{1}{2} \\ a - b = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Assim, temos que

$$a\left(a - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \iff 2a^2 - a - 1 = 0.$$

As soluções dessa equação são 1 e $-1/2$. Portanto, as soluções (a, b) para esse sistema são $(1, 1/2)$ e $(-1/2, -1)$. Concluímos que $x = 1$ e $x = -2$ são soluções para a nossa equação original.

9. Elevando ao cubo ambos os lados da equação, temos

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3 &= x + y + 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) \\ &= x + y + 9\sqrt[3]{4xy} \\ &= 108.\end{aligned}$$

Pela equação $x + y + 9\sqrt[3]{4xy} = 108$ e pelo fato de 9 dividir 108, concluímos que 9 divide $x + y$. Por essa mesma equação, podemos observar que $\sqrt[3]{4xy} \in \mathbb{N}$. Assim, temos que 2 divide xy e então $9\sqrt[3]{4xy}$ é par. Como 108 é par, também temos que $x + y$ é par. Mas, se xy é par e $x + y$ é par, então temos que x é par e y é par! Portanto 4 divide xy. Vamos agora repetir o mesmo argumento: como $\sqrt[3]{4xy}$ é inteiro e 4 divide xy, segue que 16 deve dividir xy e assim $\sqrt[3]{4xy}$ é múltiplo de 4. Como 108 também é múltiplo de 4, segue que $x + y$ é múltiplo de 4 também. Como 9 divide $x + y$, concluímos que $x + y$ é múltiplo de 36. Como $x + y < 108$, temos 2 possibilidades: $x + y$ é igual a ou 36 ou 72.

(*a*) Caso 1: $x + y = 36$. Neste caso a equação $x + y + 9\sqrt[3]{4xy} = 108$ nos dá $xy = 128$. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ xy = 128 \end{cases}$$

encontramos as soluções $(32, 4)$ e $(4, 32)$.

(*b*) Caso 2: $x + y = 72$. Neste caso a equação $x + y + 9\sqrt[3]{4xy} = 108$ nos dá $xy = 16$. Vimos anteriormente que 64 deve dividir xy. Portanto neste caso não há soluções.

Concluímos que as únicas soluções naturais para a equação $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{108}$ são $(32, 4)$ e $(4, 32)$.

Material elaborado por Letícia Mattos.