Introdução ao Cálculo – Leis do Limite – Parte 02

Funções Racionais

Introdução ao Cálculo

Introdução ao Cálculo – Leis do Limite – Parte 02
Funções Racionais

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Calcule

a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

b) $\lim_{x \to 10} \frac{x^2 - 100}{x - 10}$.

c) $\lim_{x \to 17} \frac{x^2 - 289}{x - 17}$.

Exercício 2. Calcule $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$.

Exercício 3. Calcule $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$.

Exercício 4. Se $a = \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$, calcule o valor de a^2.

Exercício 5. Calcule $a = \lim_{x \to 10} \frac{x - 10}{\sqrt{x} - \sqrt{10}}$.

Exercício 6. Calcule $\lim_{x \to 18} \frac{x - 18}{\sqrt{x} - \sqrt{18}}$.

Exercício 7. Calcule $\lim_{x \to 9} \frac{x^2 - 12x + 27}{x - 9}$.

Exercício 8. Calcule $\lim_{x \to 9} \frac{x^2 - 16x + 63}{x - 9}$.

Exercício 9. Calcule $\lim_{x \to 17} \frac{x^2 - 21x + 68}{x - 17}$.

Exercício 10. Calcule $a = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$.

Exercício 11. Calcule $a = \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{10}}{\sqrt{x} - \sqrt{9}}$.

Exercício 12. Calcule $a = \lim_{x \to 21} \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{22}}{\sqrt{x} - \sqrt{21}}$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 13. Calcule

a) $\lim_{x \to 1} \frac{(x + 2)^3 - (3)^3}{x - 1}$.

b) $\lim_{x \to 5} \frac{(x + 3)^3 - (8)^3}{x - 5}$.

c) $\lim_{x \to 5} \frac{(x + 5)^3 - (10)^3}{x - 5}$.

Exercício 14. Determine o valor de a sabendo que existe $L = \lim_{x \to 6} \frac{x^2 - ax + 54}{x - 6}$.

Exercício 15. Determine o valor de a sabendo que existe $L = \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - ax + 45}{x - 5}$.

Exercício 16. Determine o valor de a sabendo que existe $L = \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - ax + 55}{x - 5}$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 17. Calcule $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{3x + 5} - 2}{x^2 - 1}$.

Exercício 18. Calcule $\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ onde $f(x) = \frac{1}{x}$.

Exercício 19. Calcule $\lim_{x \to p} \frac{x^4 - p^4}{x - p}$.

Exercício 20. Calcule $\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{\sqrt{x + 7} - \sqrt{14}}$.

Exercício 21. Calcule $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{2x + 3} - \sqrt{5}}$.

Exercício 22. Se $\lim_{x \to 5} \frac{f(x) - 7}{x - 5} = 10$, determine $\lim_{x \to 5} f(x)$.

Exercício 23. Determine o valor de a de modo que exista $L = \lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 4x + a}{x^2 - 2x + 1}$. Em seguida, calcule o limite. (Dica: para a divisão dos polinômios, lembre-se do dispositivo prático de Briot-Ruffini)

Respostas e Soluções.

1.

a) Temos $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6$.

b) Temos $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^2-100}{x-10}=\lim\limits_{x\to 10}(x+10)=20$.

c) Temos $\lim\limits_{x\to 17}\dfrac{x^2-289}{x-17}=\lim\limits_{x\to 17}(x+17)=34$.

2. Como $\sqrt{x}-\sqrt{3}\neq 0$ se $x\neq 3$, podemos efetuar o cancelamento de $\sqrt{x}-\sqrt{3}$ na fatoração a seguir:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} &= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

3. Como $x+1\neq 0$ se $x\neq -1$, podemos efetuar o cancelamento de $x+1$ na fatoração a seguir:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1} &= \lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}\\ &= \lim_{x\to -1} x-1\\ &= -2\end{aligned}$$

4. Como $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$, segue que $a=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{x}+\sqrt{2})=2\cdot\sqrt{2}$. Portanto, $a^2=8$.

5. Temos $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x-10}{\sqrt{x}-\sqrt{10}}=\lim\limits_{x\to 10}(\sqrt{x}+\sqrt{10})=2\cdot\sqrt{10}$.

6. Temos $\lim\limits_{x\to 18}\dfrac{x-18}{\sqrt{x}-\sqrt{18}}=\lim\limits_{x\to 18}(\sqrt{x}+\sqrt{18})=2\cdot\sqrt{18}$.

7.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 9}\frac{x^2-12x+27}{x-9} &= \lim_{x\to 9}\frac{(x-3)(x-9)}{x-9}\\ &= \lim_{x\to 9}(x-3)\\ &= 6\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 9}\frac{x^2-16x+63}{x-9} &= \lim_{x\to 9}\frac{(x-7)(x-9)}{x-9}\\ &= \lim_{x\to 9}(x-7)\\ &= 2.\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 17}\frac{x^2-21x+68}{x-17} &= \lim_{x\to 17}\frac{(x-4)(x-17)}{x-17}\\ &= \lim_{x\to 17}(x-4)\\ &= 13.\end{aligned}$$

10. Como $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$, segue que

$$\begin{aligned}a &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3}}\right)\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3}}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}a &= \lim_{x\to 9}\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{10}}{\sqrt{x}-\sqrt{9}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{10}}{\sqrt{x}+\sqrt{9}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{9}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{10}}\right)\\ &= \lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{9}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{10}}\\ &= \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{10}}\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}a &= \lim_{x\to 21}\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{22}}{\sqrt{x}-\sqrt{21}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{22}}{\sqrt{x}+\sqrt{21}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{21}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{22}}\right)\\ &= \lim_{x\to 21}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{21}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{22}}\\ &= \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{22}}\end{aligned}$$

13. Como $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, temos:

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)^3-(3)^3}{x-1} &= \lim_{x\to 1}[(x+2)^2+(x+2)3+9]\\ &= 27\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}\frac{(x+3)^3-(8)^3}{x-5} &= \lim_{x\to 5}[(x+3)^2+(x+3)8+64]\\ &= 192\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}\frac{(x+5)^3-(10)^3}{x-5} &= \lim_{x\to 5}[(x+5)^2+(x+5)10+100]\\ &= 300\end{aligned}$$

14. Se 6 não é raiz de $x^2-ax+54$, temos $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{x^2-ax+54}=\dfrac{1}{90-6a}$. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 6}\frac{1}{x-6} &= \lim_{x\to 6}\left(\frac{x^2-ax+54}{x-6}\cdot\frac{1}{x^2-ax+54}\right)\\ &= \frac{L}{90-6a}.\end{aligned}$$

Isso é um absurdo, pois o limite anterior não existe. Logo, $90-6a=0$ e $a=15$. Nesse caso, cancelando o termo $x-6$, o limite é $L=\lim\limits_{x\to 6}(x-9)=-3$.

15. Se 5 não é raiz de $x^2 - ax + 45$, temos $\lim_{x\to 5} \frac{1}{x^2 - ax + 45} = \frac{1}{70 - 5a}$. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5} \frac{1}{x-5} &= \lim_{x\to 5} \left(\frac{x^2 - ax + 45}{x-5} \cdot \frac{1}{x^2 - ax + 45} \right) \\ &= \frac{L}{70 - 5a}.\end{aligned}$$

Isso é um absurdo, pois o limite anterior não existe. Logo, $70 - 5a = 0$ e $a = 14$. Nesse caso, cancelando o termo $x - 5$, o limite é $L = \lim_{x\to 5}(x - 9) = -4$.

16. Se 5 não é raiz de $x^2 - ax + 55$, temos $\lim_{x\to 5} \frac{1}{x^2 - ax + 55} = \frac{1}{80 - 5a}$. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5} \frac{1}{x-5} &= \lim_{x\to 5} \left(\frac{x^2 - ax + 55}{x-5} \cdot \frac{1}{x^2 - ax + 55} \right) \\ &= \frac{L}{80 - 5a}.\end{aligned}$$

Isso é um absurdo, pois o limite anterior não existe. Logo, $80 - 5a = 0$ e $a = 16$. Nesse caso, cancelando o termo $x - 5$, o limite é $L = \lim_{x\to 5}(x - 11) = -6$.

17. Primeiramente note que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5} - 2}{x^2 - 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5} - 2}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5} - 2}{(x-1)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5} - 2}{(x-1)}\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\sqrt[3]{3x+5} = u$, temos $u \to 2$ quando $x \to 1$ e $u^3 - 8 = 3(x-1)$. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5} - 2}{x-1} &= \lim_{u\to 2} \frac{u-2}{(u^3 - 8)/3} \\ &= \lim_{u\to 2} \frac{3(u-2)}{(u^3 - 8)} \\ &= \lim_{u\to 2} \frac{3(u-2)}{(u-2)(u^2 + 2u + 4)} \\ &= \lim_{u\to 2} \frac{3}{(u^2 + 2u + 4)} \\ &= \frac{3}{12}\end{aligned}$$

Logo, o limite procurado vale: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{8}$.

18.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x-p} &= \lim_{x\to p} \frac{1/x - 1/p}{x-p} \\ &= \lim_{x\to p} \frac{p-x}{px(x-p)} \\ &= \lim_{x\to p} \frac{-1}{xp} \\ &= \frac{-1}{p^2}\end{aligned}$$

19.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to p} \frac{x^4 - p^4}{x-p} &= \lim_{x\to p} \frac{(x-p)(x^3 + x^2p + xp^2 + p^2)}{x-p} \\ &= \lim_{x\to p}(x^3 + x^2p + xp^2 + p^2) \\ &= 4p^3\end{aligned}$$

20. Usando diferença de quadrados, temos:

$$\begin{aligned}x - 7 &= (\sqrt{x} - \sqrt{7})(\sqrt{x} + \sqrt{7}) \\ x + 7 - 14 &= (\sqrt{x+7} - \sqrt{14})(\sqrt{x+7} + \sqrt{14})\end{aligned}$$

Podemos substituir as relações anteriores no limite com o intuito de eliminar a raiz $x = 7$ do numerador e do denominador:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{\sqrt{x+7} - \sqrt{14}} &= \lim_{x\to 7} \frac{x-7}{\sqrt{x} + \sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{x+7} + \sqrt{14}}{x + 7 - 14} \\ &= \lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+7} + \sqrt{14}}{\sqrt{x} + \sqrt{7}} \\ &= \frac{\sqrt{14} + \sqrt{14}}{\sqrt{7} + \sqrt{7}} \\ &= \sqrt{2}.\end{aligned}$$

21. Procederemos de forma semelhante à questão anterior:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1}}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{5}} &= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x} + \sqrt{1}} \cdot \frac{\sqrt{2x+3} + \sqrt{5}}{2x + 3 - 5} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x+3} + \sqrt{5}}{2(\sqrt{x} + \sqrt{1})} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

22. Temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}(f(x) - 7) &= \lim_{x\to 5} \left(\frac{f(x) - 7}{x-5} \cdot (x-5) \right) \\ &= 10 \cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{x\to 5} f(x) = 7$.

23. Se 1 não é raiz de $x^4 - 4x + a = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2 - 2x + 1} &= \lim_{x\to 1} \left(\frac{x^4 - 4x + a}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{1}{x^4 - 4x + a} \right) \\
&= L \cdot \frac{1}{a - 3}.
\end{aligned}$$

Isso é um absurdo, pois não existe $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$. Logo $a = 3$ e para esse valor temos

$$x^4 - 2x + 3 = (x-1)^2(x^2 + 2x + 3).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x^2 + 2x + 3)}{(x-1)^2} \\
&= \lim_{x\to 1} (x^2 + 2x + 3) \\
&= 6.
\end{aligned}$$

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com