Módulo de Funções - Noções Básicas

Funções - Noções Básicas.

9^o **ano E.F.**

Portal da Matemática
OBMEP

Funções - Noções Básicas

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Em um certo dia, três mães deram à luz em uma maternidade. Uma delas teve trigêmeos, outra gêmeos e a terceira, um único filho. Considere o conjunto das mães, o conjunto das crianças e as seguintes relações:

a) a que associa a cada mãe o seu filho.

b) a que associa a cada criança a sua mãe.

c) a que associa a cada criança o seu irmão.

Qual(ais) é(são) função(ões)?

Exercício 2. Uma professora resolve distribuir uma pesquisa, colocando no quadro três paisagens: praia, fazenda e floresta. Em seguida, pediu para que cada um dos 30 alunos escolhesse sua paisagem preferida. Seja A o conjunto formado pelos alunos e B o conjunto formado pelas três paisagens, determine, em cada situação abaixo, se a relação $f : A \to B$ é uma função e, caso seja, classifique-a em injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

a) todos os alunos escolheram praia.

b) dez alunos escolheram praia, dez alunos escolheram montanha e dez alunos escolheram fazenda.

c) todos os alunos escolheram sua paisagem preferida, com exceção de Joãozinho que disse não gostar de nenhuma.

d) todos os alunos escolheram sua paisagem preferida, com exceção de Joãozinho que disse gostar das três de maneira igual.

Exercício 3. Sejam as funções

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 2x. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = x + 5. \end{aligned}$$

É fácil perceber que ambas são bijetivas. Determine:

a) $f(4)$.

b) $f(-2)$.

c) $f^{-1}(4)$.

d) $f \circ g(2)$.

e) $g \circ f(2)$.

f) $f \circ f(3)$.

g) $f^{-1}(x)$.

h) $g^{-1}(x)$.

i) $f \circ g(x)$.

j) $g \circ f(x)$.

k) $f \circ f(x)$.

l) $f \circ f^{-1}(x)$.

Exercício 4. Patrícia é nova em sua escola e acabou de conhecer três meninas: Alexandra, cujo signo é Áries; Beatriz, cujo signo é Virgem; e Címtia, cujo signo é Leão. Considerando o conjunto A formado pelas novas colegas de Patrícia e o conjunto B dos 12 signos do zodíaco, classifique em verdadeiros ou falso:

a) $A \to B$ é injetiva.

b) $A \to B$ é sobrejetiva.

c) $A \to B$ é bijetiva.

Exercício 5. Construa o gráfico das seguintes funções, determine o conjunto imagem e classifique-as em injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

a)

$$\begin{aligned} f : \{1, 2, 3, 4\} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = 2x. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f : \{1, 2, 3, 4\} &\to \{2, 4, 6, 8\} \\ x &\to f(x) = 2x. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = 2x. \end{aligned}$$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Construa o gráfico das seguintes funções e classifique-as em injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

a)

$$\begin{aligned} f : \{1, 2, 3, 4\} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 3x - 4. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f : \{1, 2, 3, 4\} &\to \{-1, 2, 5, 8\} \\ x &\longmapsto f(x) = 3x - 4. \end{aligned}$$

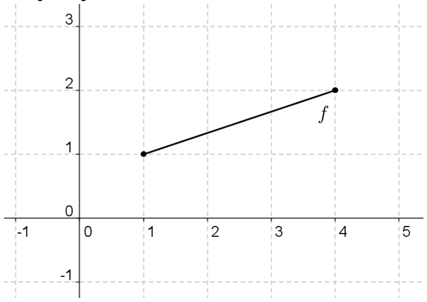
c)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 3x - 4. \end{aligned}$$

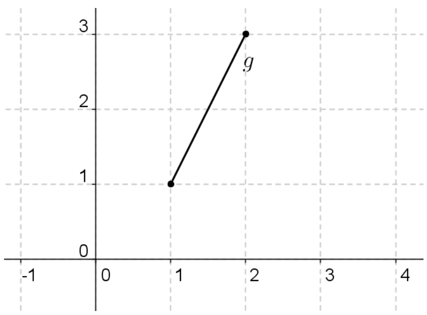
Exercício 7. Em uma biblioteca, todos os livros são catalogados pelo título, além de outros identificadores, e há títulos com mais de um exemplar. A função f cujo domínio é o conjunto de todos os livros catalogados e o contradomínio é o conjunto dos títulos dos livros catalogados dessa biblioteca é injetiva?

Exercício 8. Analise as funções abaixo e classifique-as em injetiva, sobrejetiva e bijetiva.

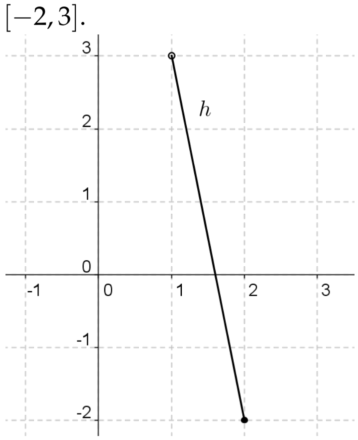
a) $f : [1,1] \to [4,2]$.



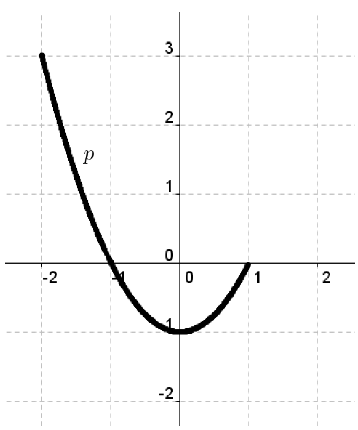
b) $g : [1,2] \to \mathbb{R}$.



c) $h : (1,2] \to [-2,3]$.



d) $p : [-2,1] \to [-1,4]$.



Exercício 9. Seja um retângulo cujo comprimento tem o dobro da medida da altura. Se x é a medida da altura, determine

a) $P(4)$, sendo P o perímetro deste retângulo.

b) $P(x)$.

c) $A(2)$, sendo A a área deste retângulo.

d) $A(x)$.

Exercício 10. Jovaldo, de posse de uma régua de madeira de 1m de comprimento, começa a dividi-la, seguindo a seguinte regra: no passo 1, ele a divide ao meio; no passo 2, ele divide cada pedaço ao meio; no passo 3, ele divide cada pedaço, obtido no passo anterior, ao meio; e assim sucessivamente. Sendo A o conjunto dos números naturais e B o conjunto dos números reais, determine:

a) a função $P(x) : A \to B$, descrita no processo acima, onde $P(x)$ é o número de pedaços obtidos no passo x.

b) o número de pedaços no passo 10.

c) o passo realizado quando se obtém 512 pedaços.

Exercício 11. Uma fábrica de canetas tem um custo diário de produção de $R\$120,00$, mais $R\$0,40$ por caneta. Cada caneta é vendida por $R\$1,20$. Determine

a) a lei de associação da quantidade x de canetas e do custo diário de produção $C(x)$ dessas x canetas.

b) o custo diário de produção de 80 canetas.

c) a lei de associação do lucro diário $L(x)$ após a venda de x canetas e essa quantidade de canetas.

d) o lucro da empresa com a venda de 200 canetas.

Exercício 12. Suponha que o número de indivíduos de uma determinada população seja dado pela função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(t) = a \cdot 2^{-bt}$, onde a variável t é dada em anos e a e b são constantes. Se a população inicial $(t = 0)$ é 1024 e após 10 anos seja a metade da inicial, determine:

a) os valores de a e b.

b) o tempo mínimo para que a população se reduza a $1/8$ da população inicial.

c) se essa função é injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

Exercício 13. Construa o gráfico das seguintes funções e classifique-as em injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

a)

$$\begin{aligned} f: \{1,2,3,4\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f: \{1,2,3,4\} &\rightarrow \{1,4,9,16\} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2. \end{aligned}$$

Exercício 14. Quando colocamos gasolina no carro, o preço P que vamos pagar depende da quantidade x de litros. Considerando que o litro da gasolina seja $R\$3,60$, determine:

a) a lei de associação $P(x)$ que relaciona as grandezas P e x.

b) o maior conjunto domínio possível para $P(x)$.

c) o preço de 70 litros de gasolina.

d) a quantidade de gasolina que se pode comprar com $R\$100,00$.

Exercício 15. Sejam as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $g(x) = 3x - 2$ e $f \circ g(x) = 6x + 1$. Determine

a) $f(4)$.

b) $f(x)$.

Exercício 16. Seja f um função, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, bijetiva tal que $f(x+3) = 2x - 1$. Determine $f^{-1}(x)$.

Exercício 17. Seja f um função, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, bijetiva tal que $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2$. Determine $f^{-1}(1)$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 18. Considere o trinômio de segundo grau $p(x) = x^2 - x + 1$.

(a) Determine o número de soluções reais distintas da equação $p(x^2) = x^2$.

(b) Determine o número de soluções reais distintas da equação $p \circ p(x) = p(x)$.

Exercício 19. Uma função real de variável real f é tal que $f(1/2) = \sqrt{a}$, sendo a um número real positivo, e $f(x+1) = x \cdot f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Determine $f(7/2)$.

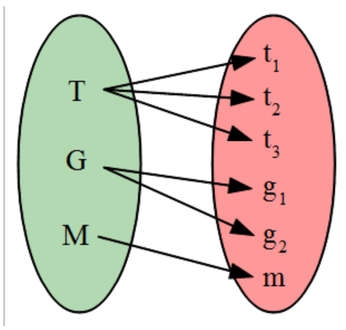
Exercício 20. Seja a função $f(x) = \dfrac{x-2}{1+x}$, de A em B, bijetora. Determine sua inversa.

Exercício 21. Seja uma função f, de A e B, sendo A e B conjuntos que possibilitem a composição de f com ela mesma. Se $f(x) = \dfrac{x+3}{1-x}$, determine $f(f(x))$.

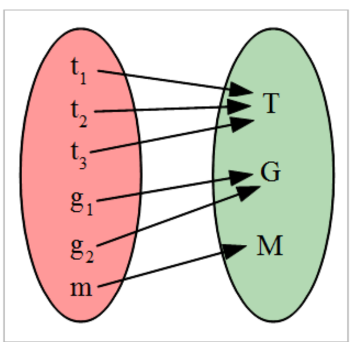
Respostas e Soluções.

1. (Extraído da Vídeo Aula)
Vamos chamar a mãe dos trigêmeos de T e os trigêmeos de t_1, t_2 e t_3; a mãe dos gêmeos de G e os gêmeos de g_1 e g_2; e a última mãe de M e seu filho de m. Vamos analisar os diagramas de setas de cada situação, considerando o conjunto domínio aquele que "'saem"' setas e o conjunto contradomínio aquele que "'chegam"' setas, e classificá-los em função ou não função.

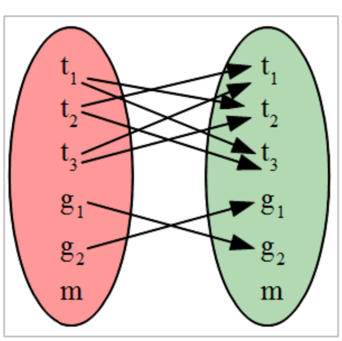
a) Não é função pois cada elemento do domínio possui mais de uma imagem.



b) É função pois cada elemento do domínio possui exatamente uma imagem.



c) Não é função pelo mesmo motivo do item a, além de ter elemento do domínio sem imagem.



2. Inicialmente, como o conjunto B, contradomínio, possui menos elementos que o conjunto A, domínio, caso seja função, f não poderá ser injetiva, pois haverá, logicamente, imagens repetidas. Assim, basta verificar se são sobrejetivas, caso sejam função.

a) É função pois cada aluno (elemento do domínio) escolheu uma única paisagem (elemento do contradomínio). Como o conjunto imagem, $\{praia\}$, é diferente do conjunto contradomínio, a função não é sobrejetiva.

b) É função pelo mesmo motivo do item a. Como o conjunto imagem possui os mesmos elementos do conjunto contradomínio, a função é sobrejetiva.

c) Como Joãozinho não escolheu paisagem, temos elemento do domínio sem imagem, ou seja, não é função.

d) Como Joãozinho escolheu as três, temos elemento do domínio com mais de uma imagem, ou seja, não é função.

3.

a) $f(4) = 2 \cdot 4 = 8$.

b) $f(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$.

c) $f^{-1}(4) = 2$, pois, fazendo $f(x) = 4$, temos $x = 2$.

d) $f \circ g(2) = 14$, pois $g(2) = 7$, daí $f(g(2)) = f(7) = 14$.

e) $g \circ f(2) = 9$, pois $f(2) = 4$, então $g(f(2)) = g(4) = 9$.

f) $f \circ f(3) = 12$, pois $f(3) = 6$, daí $f(f(3)) = f(6) = 12$.

g) $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$, pois $x = \frac{f(x)}{2}$.

h) $g^{-1}(x) = x - 5$, pois $x = g(x) - 5$.

i) $f \circ g(x) = 2g(x) = 2(x+5) = 2x + 10$.

j) $g \circ f(x) = f(x) + 5 = 2x + 5$.

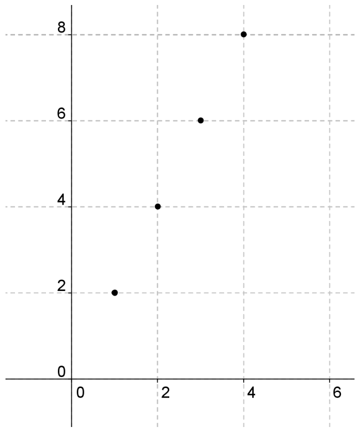
k) $f \circ f(x) = 2f(x) = 2 \cdot 2x = 4x$.

l) $f \circ f^{-1}(x) = 2 \cdot \frac{x}{2} = x$.

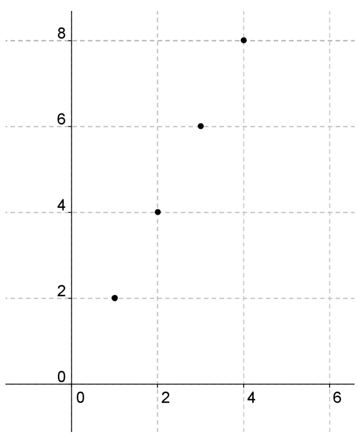
4. (Extraído da Vídeo Aula)
Do enunciado, percebe-se que o contradomínio é um conjunto diferente do conjunto imagem, isso significa que a função não é sobrejetora (logo, não poderá ser bijetora), porém, não existem imagem ligando-se a mais de um elemento do domínio (imagem repetida), isso significa que a função é injetora. Temos então que o único item verdadeiro é o item a.

5.

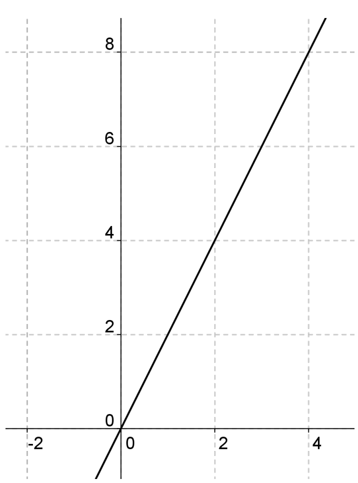
a) $Im = \{2, 4, 6, 8\}$. Função injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, mas não sobrejetiva pois o contradomínio $\mathbb{R}$ é diferente da $Im = \{2, 4, 6, 8\}$.



b) $Im = \{2, 4, 6, 8\}$. Função injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Função sobrejetiva, pois $Im = CD$. Assim, f é bijetiva.

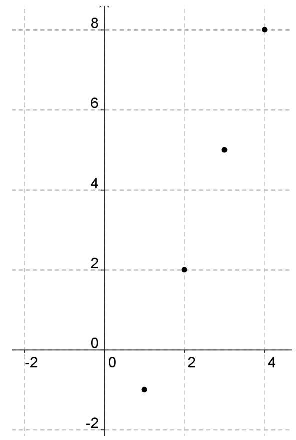


c) Função injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Função sobrejetiva, pois $Im = CD$. Assim, f é bijetiva.

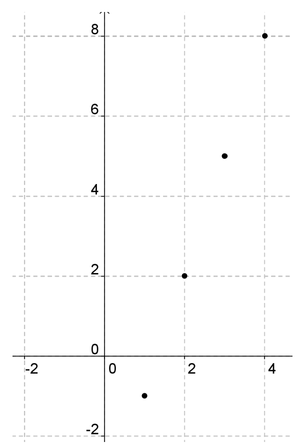


6.

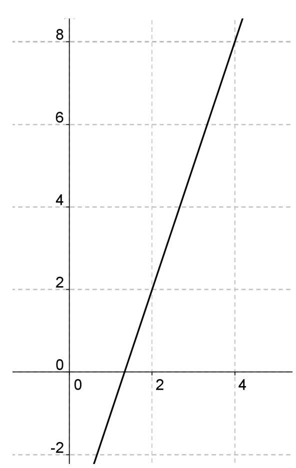
a) Injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.



b) Injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Sobrejetiva, pois $Im = CD$. Assim, f é bijetiva.



c) Injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Sobrejetiva, pois $Im = CD$. Assim, f é bijetiva.



7. (Extraído da Vídeo Aula)
Vamos tomar dois exemplares, E_1 e E_2, pertencentes ao domínio e ambos com mesmo título, T, pertencente ao contradomínio, sendo esse caso existente de acordo com o enunciado. Temos que a imagem de E_1 é T e a imagem de E_2 também é T, ou seja, temos dois elementos do domínio com a mesma imagem, ou seja, a função NÃO é injetiva.

8.

a) Injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$. Sobrejetiva, pois $Im = CD$. Assim, f é bijetiva.

b) Injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$.

c) Injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$.

d) Injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$. Sobrejetiva, pois $Im = CD$. Assim, p é bijetiva.

9.

a) $P(4) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.

b) $P(x) = 2x + 2 \cdot 2x = 6x$.

c) $A(2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

d) $A(x) = x \cdot 2x = 2x^2$.

10.

a) se, em cada passo o número de pedaços dobra e no início existe um pedaço, então $P(x) = 2^x$.

b) $P(10) = 2^{10} = 1024$.

c) $P(x) = 2^x = 512 \Rightarrow 2^x = 2^9 \Rightarrow x = 9$.

11.

a) $C(x) = 120 + 0,40x$.

b) $C(80) = 120 - 0,40 \cdot 80 = 120 - 12 = R\$108,00$.

c) $L(x) = 1,20x - (120 - 0,40x) = 0,80x - 120$.

d) $L(200) = 0,80 \cdot 200 - 120 = 160 - 120 = R\$40,00$.

12.

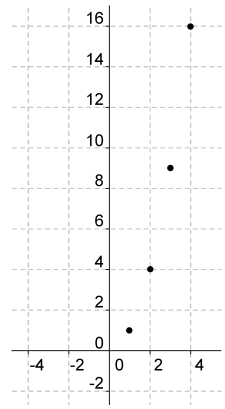
a) $a \cdot 2^{-b \cdot 0} = 1024$, donde temos $a = 1024$. Depois de 10 anos, ficamos com $1024 \cdot 2^{-10b} = 512$, que simplificando, chegamos a $b = 1/10$.

b) $1024 \cdot 2^{-t} = 128$, donde temos $t = 7$ anos.

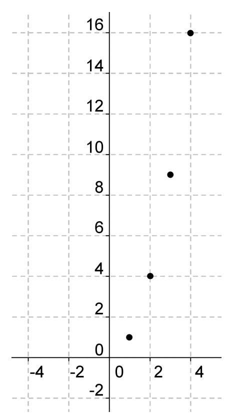
c) Como a população é decrescente, mas nunca negativa, iniciando em 1024, a função não pode ser sobrejetiva, pois $CD \neq Im$. Agora, se tomarmos $f(t_1) = f(t_2)$, temos que $1024 \cdot 2^{-t_1/10} = 1024 \cdot 2^{-t_2/10}$, o que implica em $t_1 = t_2$, ou seja, a função f é injetiva.

13.

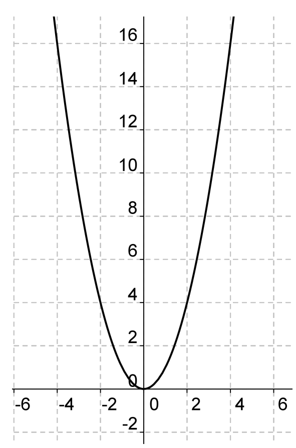
a) Injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$.



b) Injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$. Sobrejetiva, pois $Im = CD$. Assim, f é bijetiva.



c) Nem sobrejetiva, nem injetiva.



14.

a) $P(x) = 3,60x$.

b) A quantidade de litros pode ser qualquer número real positivo (desde que haja quantidade infinita de gasolina!), portanto $D_f = \mathbb{R}_+$.

c) $P(70) = 3,60 \cdot 70 = R\$252,00$.

d) $3,60x = 100 \Rightarrow x = \dfrac{100}{3,6} \cong 27,28\ell$.

15. (Extraído da Vídeo Aula)

a) Se queremos $f(4)$, devemos ter $g(x) = 4$, sendo que isso ocorre para $x = 2$. Portanto, temos $f(4) = f(g(2)) = 6 \cdot 2 + 1 = 13$.

b) Se $f(g(x)) = f(3x - 2) = 6x + 1$, então fazendo $x = \dfrac{k+2}{3}$,temos $f(k) = 6 \cdot \dfrac{k+2}{3} + 1 = 2k + 5$, ou seja, $f(x) = 2x + 5$.

16. (Extraído da Vídeo Aula)
Substituindo x por $k - 3$, temos $f(k - 3 + 3) = 2(k - 3) - 1$, ou seja, $f(k) = 2k - 7$. Temos então que $f(x) = 2x - 7$. Como queremos a inversa, basta isolar x, ou seja, $x = \dfrac{f(x) + 7}{2}$. Concluímos que $f^{-1}(x) = \dfrac{x+7}{2}$.

17. (Extraído da Vídeo Aula)
A inversa é dada por $f^{-1}(x) = (x - 2)^3$. Assim,

$$f^{-1}(1) = (1 - 2)^3 = -1.$$

18. (Extraído da OBM $-$ 2014)

(a)

$$\begin{aligned} p(x^2) &= x^2 \\ (x^2)^2 - (x^2) + 1 &= x^2 \\ (x^2 - 1)^2 &= 0 \\ x^2 - 1 &= 0 \\ x &= \pm 1. \end{aligned}$$

Teremos então que o número de soluções reais distintas é 2.

(b) Seja $p(x) = y$. Queremos determinar as raízes de $p(y) = y$, ou seja, $y^2 - y + 1 = y \Leftrightarrow (y - 1)^2 = 0$. Devemos ter $y = 1$ e consequentemente $x^2 - x + 1 = 1$, que implica em raízes 0 e 1, ou seja, duas soluções reais distintas.

19. Inicialmente, fazendo $x = 1/2$, temos

$$f\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{a}}{2}.$$

Agora, com $x = 3/2$, ficamos com

$$f\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{a}}{4}.$$

Por fim, seguindo para $x = 5/2$, chegaremos a

$$f\left(\frac{5}{2} + 1\right) = \frac{5}{2} \cdot f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15\sqrt{a}}{8},$$

ou seja, $f\left(\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{15\sqrt{a}}{8}$.

20.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x-2}{1+x} \\ y + yx &= x - 2 \\ yx - x &= -y - 2 \\ x(y-1) &= -y - 2 \\ x &= \frac{y+2}{1-y}. \end{aligned}$$

Portanto, temos que $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$.

21.

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= \frac{f(x) + 3}{1 - f(x)} \\ &= \frac{\frac{x+3}{1-x}}{} \\ &= \frac{\dfrac{x+3}{1-x} + 3}{1 - \dfrac{x+3}{1-x}} \\ &= \frac{\dfrac{-2x+6}{1-x}}{\dfrac{-2x-2}{1-x}} \\ &= \frac{-2(x-3)}{-2(x+1)} \\ &= \frac{(x-3)}{(x+1)}. \end{aligned}$$

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com