

Módulo de Ciclo Trigonométrico

Secante, Cossecante e Cotangente.

1ª série E.M.



1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Seja $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ tal que $\sin \alpha = -1$, determine, se existir, o resultado de todas as razões trigonométricas de α .

Exercício 2. Seja $\beta \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\cos \beta = -0,6$, determine, se existir:

- a) $\sin \beta$;
- b) $\cos \beta$;
- c) $\operatorname{tg} \beta$;
- d) $\operatorname{cotg} \beta$;
- e) $\sec \beta$;
- f) $\operatorname{cossec} \beta$.

Exercício 3. Definindo a $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, demonstre, a partir da relação fundamental da trigonometria, que

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x.$$

Exercício 4. Qual o resultado obtido após a simplificação de

$$E = (\sec x - \cos x) \cdot (\operatorname{cossec} x - \sin x) \cdot (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)?$$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Se $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ e $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Quais os valores de $\operatorname{cossec} \alpha$, $\operatorname{cotg} \alpha$ e $\operatorname{cossec} \alpha$?

Exercício 6. Sabendo que $\operatorname{cossec} x = 5/4$ e x é do primeiro quadrante, qual o valor da expressão $9 \cdot (\sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x)$?

Exercício 7. Se $\cos \alpha = \frac{1}{4}$, calcule o valor de

$$x = \frac{\sec^2 \alpha - \sec \alpha \cdot \operatorname{cossec} \alpha}{1 - \operatorname{cotg} \alpha}.$$

Exercício 8. Seja x um número real positivo tal que

$$\sec x - \operatorname{tg} x = 1.$$

Calcule $\sec x + \operatorname{tg} x$.

Exercício 9. Calcule uma expressão equivalente a

$$\operatorname{cotg}(2x) + \operatorname{cossec}(2x).$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 10. Sabendo que $\sin x = \frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, o valor de $\frac{\operatorname{cossec} x - \sec x}{\operatorname{cotg} x - 1}$

Exercício 11. Quais os valores de t pra que tenhamos

$$(\cos \alpha)t^2 - 2t + \cos \alpha = 0?$$

Exercício 12. Se o número real x é tal que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ e $\sec x = -\sqrt{5}$, então $\operatorname{cotg} x$ é igual a

Exercício 13. A partir das fórmulas do cosseno da soma e do cosseno da diferença, prove que:

a) $\cos(a+b) - \cos(a-b) = 2 \sin a \sin b$.

b) $\cos 1^\circ - \cos 45^\circ = 2 \cdot \sin 23^\circ \cdot \sin 22^\circ$.

c) $1 - \operatorname{cotg} 23^\circ = \frac{2}{1 - \operatorname{cotg} 22^\circ}$.

Exercício 14.

a) Prove que $\sin(2x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

b) Prove que $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

c) Se $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ é um número racional ($\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), prove que $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$ são números racionais.

d) Prove que $\operatorname{tg} x = \operatorname{cossec}(2x) - \operatorname{cotg}(2x)$.

e) Reciprocamente, se $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$ são números racionais, prove que $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ é número racional.

Exercício 15. Resolva a equação trigonométrica

$$\sin^3 x(1 + \operatorname{cotg} x) + \cos^3 x(1 + \operatorname{tg} x) = \cos(2x),$$

sendo $0 \leq x \leq \pi$.

Exercício 16. Sendo $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ e $\operatorname{tg} \alpha \cdot \sec \alpha = \frac{1}{5}$, calcule o valor do $\sin \alpha$.

Respostas e Soluções.

1. (Extraído da Vídeo Aula)

Se $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ e $\sin \alpha = -1$, então $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ e

i) $\sin \alpha = -1$.

ii) $\cos \alpha = 0$.

iii) $\operatorname{tg} \alpha = \#$.

iv) $\operatorname{cotg} \alpha = 0$.

v) $\sec \alpha = \#$.

vi) $\operatorname{cosec} \alpha = -1$.

2. (Extraído da Vídeo Aula)

Como $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\pi\right]$ teremos que o seno, o cosseno, a secante e a cosecante com sinais negativos e as tangente e cotangente positivas. Seguindo com a relação fundamental da trigonometria teremos

$$\begin{aligned}\sin^2 \beta + \cos^2 \beta &= 1 \\ \sin^2 \beta + (-0,6)^2 &= 1 \\ \sin \beta &= -0,8.\end{aligned}$$

Portanto:

a) $\sin \beta = -0,8$;

b) $\cos \beta = -0,6$;

c) $\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}$;

d) $\operatorname{cotg} \beta = \frac{3}{4}$;

e) $\sec \beta = -\frac{5}{3}$;

f) $\operatorname{cosec} \beta = -\frac{5}{4}$.

3. Podemos dividir a relação por $\cos^2 x \neq 0$ obtendo

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ \operatorname{tg}^2 x + 1 &= \sec^2 x\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}E &= (\sec x - \cos x) \cdot (\operatorname{cosec} x - \sin x) \cdot (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x) \\ &= \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right) \cdot \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right) \cdot \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) \\ &= \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}\right) \cdot \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x}\right) \cdot \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}\right) \\ &= \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) \cdot \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sin x \cdot \cos x}\right) \\ &= (\sin x \cdot \cos x) \cdot \left(\frac{1}{\sin x \cdot \cos x}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

5. Como α está no 1º quadrante, todas as suas razões trigonométricas são positivas. Pela relação fundamental teremos

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \cos x &= \frac{\sqrt{5}}{3}.\end{aligned}$$

Agora, resolvendo o que foi pedido, teremos

i) $\sec \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$;

ii) $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$; e

iii) $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{3}{2}$.

6. (Adaptado do vestibular da UFSC)

Como $x \in [0, \pi]$, então todas as suas razões trigonométricas são positivas. Tendo $\operatorname{cosec} x = 5/4$, chegamos a $\sin x = 4/5$ e, pela relação fundamental da trigonometria, $\cos x = 3/5$. Por fim, $\sec x = 5/3$, $\operatorname{tg} x = 4/3$ e

$$9 \cdot (\sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x) = 9 \cdot \left[\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \right] = 41.$$

7. Simplificando a equação em função do seno e do cosseno de α chega-se a

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sec^2 \alpha - \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha}{1 - \operatorname{cotg} \alpha} \\ &= \frac{\sec \alpha (\sec \alpha - \operatorname{cosec} \alpha)}{1 - \operatorname{cotg} \alpha} \\ &= \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \left(\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}\right) \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}\right) \\ &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ &= 16.\end{aligned}$$

8. Desenvolvendo a equação inicial, destacando que $\cos x \neq 0$, chegamos a

$$\begin{aligned} \sec x - \tan x &= 1 \\ \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} &= 1 \\ \frac{1 - \sin x}{\cos x} &= 1 \\ 1 - \sin x &= \cos x \end{aligned}$$

Substituindo na relação fundamental teremos $\sin x = 0$ (com $\cos x = 1$) ou $\sin x = 1$, e apenas o primeiro serve, pois para o segundo teríamos $\cos x = 0$, **absurdo**. Por fim, $\sec x = 1$ e $\operatorname{tg} x = 0$, portanto

$$\sec x + \operatorname{tg} x = 1.$$

9. (Adaptado do vestibular da UDESC - 2012)

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg}(2x) + \operatorname{cosec}(2x) &= \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} + \frac{1}{\sin(2x)} \\ &= \frac{\cos(2x) + 1}{\sin(2x)} \\ &= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x + 1}{2 \sin x \cos x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} \\ &= \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \operatorname{cotg} x \end{aligned}$$

10. (Adaptado do vestibular da UFV MG)

Como $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ teremos que o cosseno, a tangente, a cotangente e a secante com sinais negativos e o seno e a cosecante positivos. Seguindo com a relação fundamental da trigonometria teremos $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ e desenvolvendo o que foi pedido chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{cosec} x - \sec x}{\operatorname{cotg} x - 1} &= \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x} - 1} \\ &= \frac{1}{\cos x} \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

11. (Adaptado do vestibular da FURG RS)

Para $\cos \alpha = 0$, teremos $t = 0$, caso contrário, resolvendo a equação do 2º grau em t chegaremos a

$$\Delta = 4 - 4\cos^2 = 4(1 - \cos^2) = 4\sin^2 \alpha$$

e

$$\begin{aligned} t &= \frac{2 \pm 2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha} \\ &= \frac{2}{2 \cos \alpha} \pm \frac{2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha} \\ &= \sec \alpha \pm \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

12. (Adaptado do vestibular da UNIFOR CE)

Se $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, então o $\sin x < 0$ e a $\operatorname{cotg} x > 0$. Com $\sec x = -\sqrt{5}$ chegamos a $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ e, pela relação fundamental da trigonometria a $\sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. Por fim, obteremos

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{2}.$$

13.

a) As fórmulas do cosseno de soma e da subtração são

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (1)$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad (2)$$

fazendo (2) - (1), teremos

$$\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin a \sin b$$

■

b) Usando a fórmula do item a,

$$\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin a \sin b,$$

fazendo $a - b = 1^\circ$ e $a + b = 45^\circ$ teremos $a = 23^\circ$ e $b = 22^\circ$, o que demonstra o pedido. ■

c) Provar o solicitado é equivalente a provar que

$$\begin{aligned} (1 - \operatorname{cotg} 23^\circ)(1 - \operatorname{cotg} 22^\circ) &= 2 \\ \left(1 - \frac{\cos 23^\circ}{\sin 23^\circ}\right) \left(1 - \frac{\cos 22^\circ}{\sin 22^\circ}\right) &= \\ \frac{(\sin 23^\circ - \cos 23^\circ)(\sin 22^\circ - \cos 22^\circ)}{\sin 23^\circ \cdot \sin 22^\circ} &= \\ \frac{A - B}{\sin 23^\circ \cdot \sin 22^\circ} &= \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} A &= \cos 23^\circ \cos 22^\circ + \sin 22^\circ \sin 23^\circ \\ &= \cos(23^\circ - 22^\circ) \\ &= \cos 1^\circ \quad \text{e} \\ B &= \sin 22^\circ \cos 23^\circ - \sin 23^\circ \cos 22^\circ \\ &= \sin(22^\circ + 23^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \end{aligned}$$

pelo item b, teremos

$$\sin 23^\circ \cdot \sin 22^\circ = \frac{\cos 1^\circ - \cos 45^\circ}{2}$$

por fim, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{A - B}{\sin 23^\circ \cdot \sin 22^\circ} &= \\ \frac{\cos 1^\circ - \cos 45^\circ}{\cos 1^\circ - \cos 45^\circ} &= \\ \frac{2}{2} &= 2 \end{aligned}$$

■

14.

- a) Basta desenvolver os dois membros da equação.
b) Basta desenvolver os dois membros da equação.
c) (Extraído da Olimpíada Cearense de Matemática)
Supondo que $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{p}{q}$, p inteiro e q inteiro não nulo e usando as identidades dos itens a e b teremos

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\frac{2p}{q}}{1 + \frac{p^2}{q^2}} = \frac{2pq}{p^2 + q^2} \text{ e } \operatorname{cos} \alpha = \frac{1 - \frac{p^2}{q^2}}{1 + \frac{p^2}{q^2}} = \frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2},$$

o que conclui que $\operatorname{cos} \alpha$ e $\operatorname{sen} \alpha$ são também racionais. ■

- d) Basta desenvolver os dois membros da equação.
e) (Extraído da Olimpíada Cearense de Matemática)
Utilizando a identidade do item d teremos que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \operatorname{cosec} \alpha - \operatorname{cotg} \alpha \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \end{aligned}$$

Daí, como $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e portanto a divisão por $\operatorname{sen} \alpha$ existe, a $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ é racional.

15. (Adaptado da Olimpíada Pan Africana)
Desenvolvendo o membro da esquerda chegamos a

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^3 x(1 + \operatorname{cotg} x) + \operatorname{cos}^3 x(1 + \operatorname{tg} x) &= \\ \operatorname{sen}^2 x(\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x) + \operatorname{cos}^2 x(\operatorname{cos} x + \operatorname{sen} x) &= \\ (\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x)(\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x) &= \end{aligned}$$

Agora, o membro da esquerda produz

$$\begin{aligned} &= \operatorname{cos} 2x \\ &= \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= (\operatorname{cos} x + \operatorname{sen} x)(\operatorname{cos} x - \operatorname{sen} x) \end{aligned}$$

O que resulta em

$$(\operatorname{cos} x + \operatorname{sen} x)(\operatorname{cos} x - \operatorname{sen} x - 1) = 0$$

Então ($\operatorname{cos} x = -\operatorname{sen} x$), o que resulta em $x = \frac{3\pi}{4}$ rad, ou $\operatorname{cos} x - \operatorname{sen} x = 1$, que, usando a relação fundamental da trigonometria, possui conjunto solução vazio. Portanto, $S = \left\{ \frac{3\pi}{4} \right\}$.

16. A equação $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{sec} \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha = 3$ é equivalente a $3\operatorname{cos}^2 \alpha = \operatorname{sen}^2 \alpha$. Agora, substituindo na relação fundamental da trigonometria, chega-se a

$$\begin{aligned} 3\operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha &= 1 \\ 4\operatorname{cos}^2 \alpha &= 1 \\ \operatorname{cos} \alpha &= \pm \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right]$, então $\operatorname{cos} \alpha < 0$, o mesmo para o seno e, por fim, $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{2}$.