Módulo Quadriláteros

Relação de Euler para Quadriláteros

9° ano E.F.

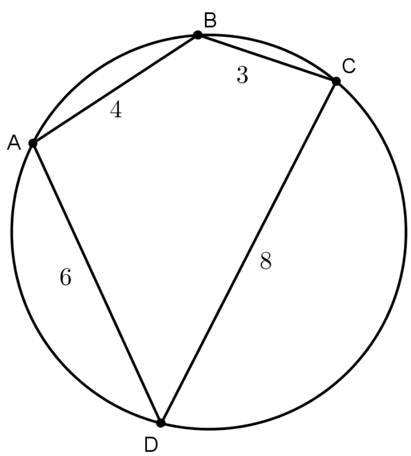
Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Portal da Matemática OBMEP

Quadriláteros
Relação de Euler para Quadriláteros

1 Exercícios Introdutórios

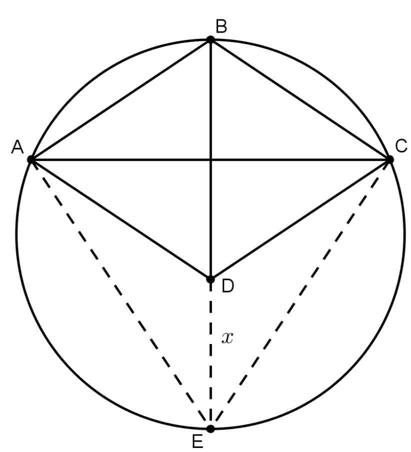
Exercício 1. Determine o produto das diagonais no quadrilátero inscritível abaixo.



Exercício 2. Determine a medida das diagonais de um trapézio isósceles cujas bases medem $12cm$ e $8cm$ e os lados não paralelos medem $10cm$.

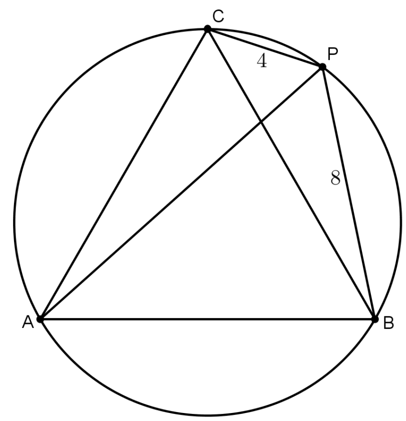
Exercício 3. Use o Teorema de Ptolomeu para determinar a medida das diagonais de um quadrado de lado ℓ.

Exercício 4. Na figura, temos um losango $ABCD$, cujas diagonais medem $AC = 8$ e $BD = 6$. Seja a circunferência α circunscrita ao triângulo ABC. Determine a medida x do prolongamento da diagonal BD, até a intersecção deste com a circunferência α no ponto E.

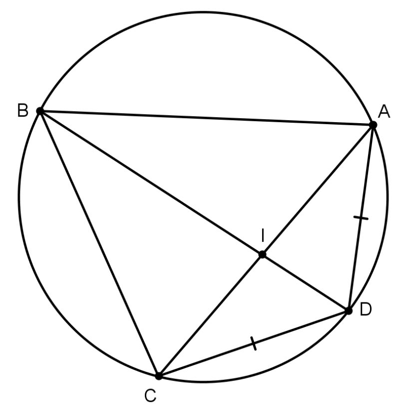


2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Seja um triângulo equilátero ABC. Sobre o menor arco BC da circunferência circunscrita ao triângulo, marca-se o ponto P. Se $PB = 8$ e $PC = 4$, determine PA.

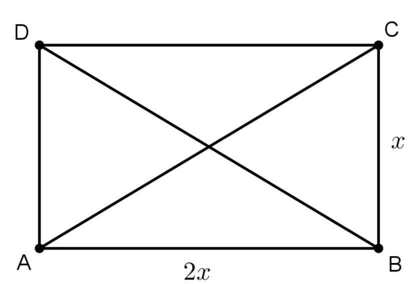


Exercício 6. No quadrilátero $ABCD$ da figura, temos $AD = DC$, $AI = 6$, $CI = 4$, $BI = 8$, onde I é a intersecção das diagonais, determine o maior lado do quadrilátero.

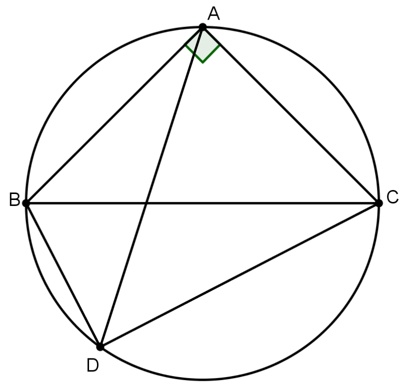


Exercício 7. Calcule a menor diagonal de um quadrilátero inscritível $ABCD$, cujos lados AB, BC, CD e DA medem respectivamente 1, 2, 2 e 3.

Exercício 8. Determine o valor de x no retângulo abaixo, se a medida de suas diagonais é $4\sqrt{5}$.



Exercício 9. Um triângulo isósceles ABC, retângulo em A, está inscrito em uma circunferência de raio 6. Sobre o arco BC, que não contém A, marca-se um ponto D, tal que $BD + CD = 18$. Determine a medida de AD.



Exercício 10. Seja ABC um triângulo isósceles, com $AB = AC = 10$ e $BC = 8$, inscrito em uma circunferência. Seja P um ponto sobre o arco BC desta circunferência, que não contém A, tal que $PB + PC = 12$. Determine PA.

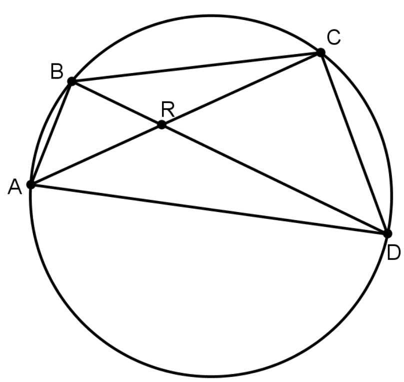
Exercício 11. Seja $ABCD$ um quadrilátero e seja O o ponto de intersecção das diagonais AC e BD. Se $BO = 4$, $OD = 6$, $OC = 3$ e $AB = 6$, determine a medida de AD.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

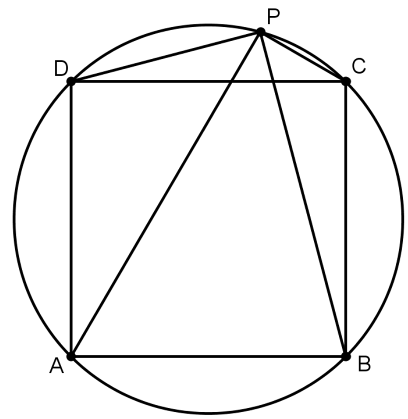
Exercício 12. Demonstre o Teorema de Ptolomeu: *o produto dos comprimentos das diagonais de um quadrilátero inscritível é igual à soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos*.

Exercício 13. Dado o quadrilátero $ABCD$, inscrito num círculo de raio r, conforme a figura, prove que:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{AB \cdot BC + CD \cdot AD}$$



Exercício 14. Prove que as distâncias entre um ponto sobre uma circunferência e os quatro vértices de um quadrado inscrito nesta não podem ser todas números racionais.



Respostas e Soluções.

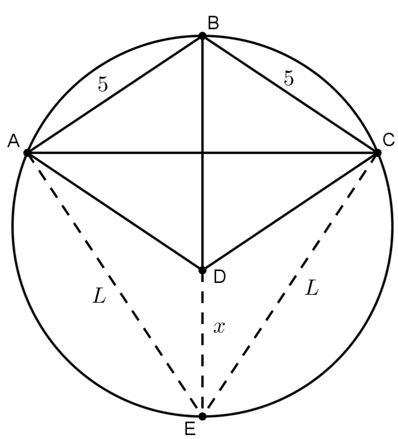
1. Pelo Teorema de Ptolomeu, temos que o produto das diagonais é $AC \cdot BD = 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 = 50$.

2. Vamos chamar a medida das diagonais de d. Como os ângulos opostos de um trapézio isósceles são suplementares, o trapézio é inscritível. Assim, aplicando o Teorema de Ptolomeu, temos $d^2 = 12 \cdot 8 + 10^2 = 196$, segue que $d = \sqrt{196} = 14cm$.

3. Como qualquer quadrado é inscritível, já que seus ângulos opostos são suplementares, basta aplicar o teorema de Ptolomeu: $d \cdot d = \ell \cdot \ell + \ell \cdot \ell$, ou seja, $d^2 = \ell^2 + \ell^2$, segue que $d = \ell\sqrt{2}$.

4. O quadrilátero $ABCE$ é inscritível e tem diagonais medindo 8 e $6 + x$ e lados medindo 5, 5, L e L. Pela simetria da figura, temos que BE é o diâmetro de α e, por consequência, $\triangle BCE$ é retângulo. Aplicando o Teorema de Ptolomeu, temos $8(6 + x) = 5L + 5L$, segue que $L = \dfrac{24 + 4x}{5}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo BCE:

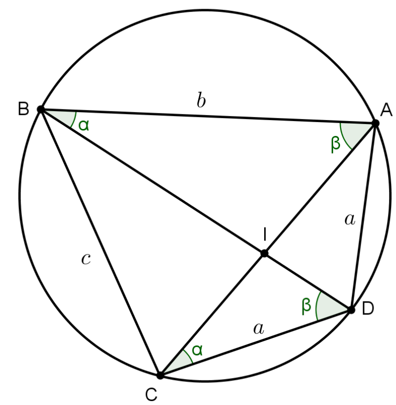
$$\begin{aligned}
(6+x)^2 &= L^2 + 5^2\\
(6+x)^2 &= \left(\frac{24+4x}{5}\right)^2 + 25\\
36 + 12x + x^2 &= \frac{576 + 192x + 16x^2}{25} + 25\\
25x^2 + 300x + 900 &= 576 + 192x + 16x^2 + 625\\
9x^2 + 108x - 301 &= 0\\
x &= \frac{-108 \pm 150}{18}\\
x &= \frac{42}{18}\\
x &= \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$



5. (Extraído da Vídeo Aula) $ABPC$ é quadrilátero inscritível. Aplicando o Teorema de Ptolomeu, temos:

$$\begin{aligned}
PA \cdot BC &= AB \cdot PC + AC \cdot PB\\
PA \cdot \ell &= \ell \cdot PC + \ell \cdot PB\\
PA &= PC + PB\\
PA &= 4 + 8\\
PA &= 12.
\end{aligned}$$

6. (Extraído da Vídeo Aula) Vamos observar a figura.



Agora temos $\triangle CID \sim \triangle BIA$ e, com isso, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{DI}{6}$, segue que $b = 2a$ e $DI = 3$. Temos também que $\triangle AID \sim \triangle BIC$ e, por consequência, $\dfrac{a}{c} = \dfrac{DI}{IC} = \dfrac{AI}{IB}$, segue que $c = \dfrac{4a}{3}$. Aplicando o Teorema de Ptolomeu:

$$\begin{aligned}
a \cdot 2a + a \cdot \frac{4a}{3} &= 10 \cdot 11\\
6a^2 + 4a^2 &= 10 \cdot 33\\
a &= \sqrt{33}.
\end{aligned}$$

Temos, portanto, que o maior lado do quadrilátero é $AB = 2\sqrt{33}$.

7. Sejam as diagonais $AC = p$ e $BD = q$. Aplicando o Teorema de Ptolomeu, temos $pq = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8$. Agora aplicando o Teorema de Hiparco, temos $\dfrac{p}{q} = \dfrac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3} = \dfrac{7}{8}$. Multiplicando as duas equações encontradas, chegamos a $pq \cdot \dfrac{p}{q} = 8 \cdot \dfrac{7}{8}$, segue que $p = \sqrt{7}$, que é a menor diagonal já que $\dfrac{p}{q} = \dfrac{7}{8}$.

8. Aplicando o Terorema de Ptolomeu, temos:

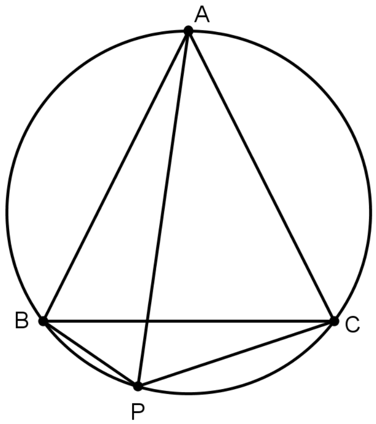
$$\begin{aligned}
4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} &= 2x \cdot 2x + x \cdot x\\
80 &= 4x^2 + x^2\\
5x^2 &= 80\\
x^2 &= 16\\
x &= 4.
\end{aligned}$$

9. Tomando a como medida do cateto do triângulo retângulo e isósceles ABC, a hipotenusa vai medir $a\sqrt{2}$. Aplicando o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero inscritível $ABDC$, temos:

$$\begin{aligned}
AD \cdot BC &= AB \cdot CD + AC \cdot BD\\
AD \cdot a\sqrt{2} &= a \cdot CD + a \cdot BD\\
AD \cdot \sqrt{2} &= CD + BD\\
AD \cdot \sqrt{2} &= 18\\
AD &= \frac{18}{\sqrt{2}}\\
AD &= 9\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

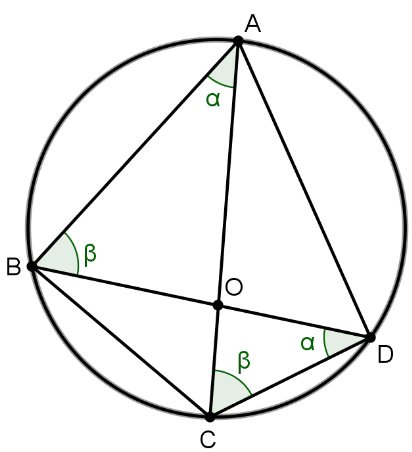
10. O quadrilátero $ABPC$ é inscritível, então vamos aplicar o Teorema de Ptolomeu:

$$\begin{aligned} PA\cdot 8 &= PB\cdot 10 + PC\cdot 10 \\ PA &= \frac{10(PB+PC)}{8} \\ PA &= \frac{5\cdot 12}{4} \\ PA &= 15. \end{aligned}$$



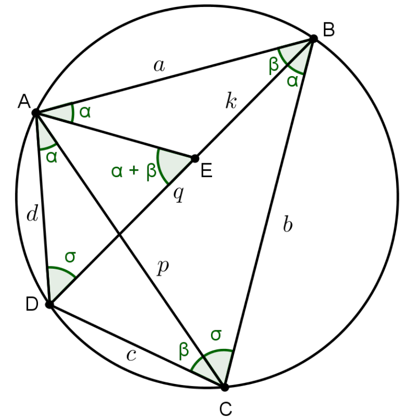
11. Sejam $\angle DCA = \angle DBA = \beta$ e $\angle BAC = \angle BDC = \alpha$, temos $\triangle ODC \sim \triangle OBA$, ou seja, $\dfrac{4}{3} = \dfrac{AO}{6} = \dfrac{6}{CD}$, segue que $AO = 8$ e $CD = \dfrac{9}{2}$; e também $\triangle ADO \sim \triangle BCO$, ou seja, $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{6}{3}$, segue que $AD = 2BC$. Aplicando o Teorema de Ptolomeu, temos:

$$\begin{aligned} AB\cdot CD + AD\cdot BC &= AC\cdot BD \\ 6\cdot\frac{9}{2} + AD\cdot\frac{AD}{2} &= 11\cdot 10 \\ AD^2 &= 220-54 \\ AD^2 &= 166 \\ AD &= \sqrt{166}. \end{aligned}$$

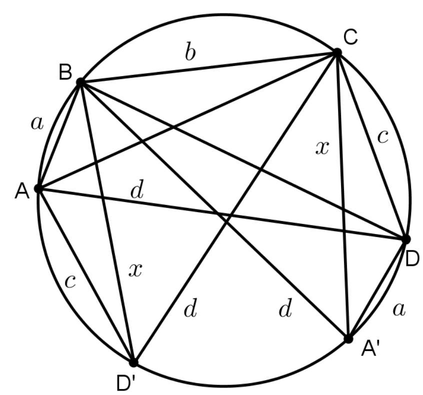


12. Vamos tomar o quadrilátero $ABCD$ inscrito a uma circunferência, sendo $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = p$ e $BD = q$. Temos que $\angle ABD = \angle ACD = \beta$, $\angle DBC = \angle DAC = \alpha$ e $\angle ADB = \angle BCA = \sigma$. Vamos tomar agora o ponto E sobre a diagonal BD de forma que $BAE = \alpha$. Assim, $\triangle ABE \sim \triangle ADC$ e, por isso, $\dfrac{a}{k} = \dfrac{p}{c}$, segue que $kp = ac$ (I). Como, pelo teorema do ângulo externo, $\angle AED = \alpha + \beta$, temos $\triangle ABC \sim \triangle DEA$ e, por isso, $\dfrac{d}{q-k} = \dfrac{p}{b}$, segue que $pq - kp = bd$ (II). Somando (I) e (II), temos o Teorema de Ptolomeu:

$$pq = ac + bd.$$



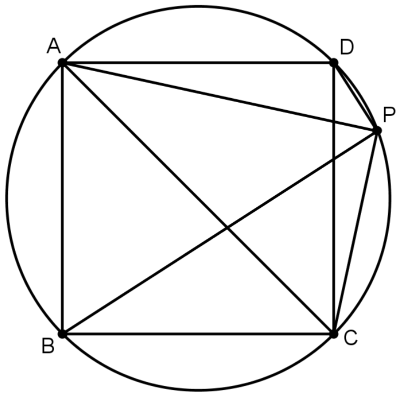
13. (Extraído do IME) Temos, no quadrilátero $ABCD$, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = p$ e $BD = q$. Vamos marcar o ponto A', sobre o arco AD, que não contém C, de forma que $DA' = AB = a$ e D', sobre o mesmo arco, de forma que $AD' = CD = c$. Agora, vamos chamar os segmentos BD' e CA' de x e temos que $A'B = D'C = AD = d$. Aplicando o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero inscrito $ABCD'$, chegamos a $px = ad + bc$ (I); e aplicando o mesmo teorema no quadrilátero $BCDA'$, chegamos a $qx = ab + cd$ (II). Dividindo as equações (I) e (II), concluímos que $\dfrac{p}{q} = \dfrac{ad+bc}{ab+cd}$, ou seja, $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{AB\cdot AD + BC\cdot CD}{AB\cdot BC + CD\cdot AD}$.



14. (Extraído da Seletiva Brasil Cone Sul) Como $ABCD$ é um quadrado então $AB = BC = CD = DA = a$. Pelo teorema de Pitágoras no triângulo ABC temos que $AC^2 = AB^2 + BC^2$, segue que $AC = a\sqrt{2}$. Aplicando o teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ABCP$, temos:

$$\begin{aligned} AC\cdot BP &= AP\cdot BC + CP\cdot AB \\ a\sqrt{2}\cdot BP &= AP\cdot a + CP\cdot a \\ \sqrt{2} &= \frac{AP+CP}{BP}. \end{aligned}$$

Se todas as medidas fossem números racionais estaríamos afirmando, de maneira falsa, que $\sqrt{2} \in \aleph$. Se P coincidir com um dos vértices, então $\dfrac{BP}{CP} = \sqrt{2}$. Assim, as medidas não podem ser todas racionais.



Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com