Inequações Produto e Quociente de Primeiro Grau

Introdução às Inequações do Primeiro Grau

1° **ano E.M.**

Portal da Matemática
OBMEP

Inequações Produto e Quociente de Primeiro Grau
Introdução às Inequações do Primeiro Grau

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. João possui 22 reais e cada chocolate custa 5 reais. Qual o número máximo de chocolates que ele pode comprar?

Exercício 2. Marcos possui 171 reais e cada carrinho custa 24 reais. Qual o número máximo de carrinhos que ele pode comprar?

Exercício 3. O conjunto solução em $U = \mathbb{R}$ da inequação $2x - 10 > 0$ é da forma $(a, +\infty)$. Determine o valor de a.

Exercício 4. O conjunto solução em $U = \mathbb{R}$ da inequação $20x - 260 > 0$ é da forma $(a, +\infty)$. Determine o valor de a.

Exercício 5. O conjunto solução em $U = \mathbb{R}$ da inequação $21x - 63 > 0$ é da forma $(a, +\infty)$. Determine o valor de a.

Exercício 6. João usa 2000 reais do seu salário para seus gastos fixos em cada mês. Ele deve guardar metade do dinheiro restante em uma aplicação financeira. Se todo mês ele pretende depositar pelo menos 5000 reais nessa aplicação, qual o valor mínimo do salário do João?

Exercício 7. O conjunto solução da inequação em $U = \mathbb{R}$ $2x - 8 > 2$ é da forma $(a, +\infty)$. Determine o valor de a.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. O conjunto solução em $U = \mathbb{R}$ da inequação $12 - 2x > 2$ é da forma $(-\infty, a)$. Determine o valor de a.

Exercício 9. O conjunto solução em $U = \mathbb{R}$ da inequação $264 - 20x > 4$ é da forma $(-\infty, a)$. Determine o valor de a.

Exercício 10. As desigualdades $21 < 7x + 7$ e $1x + 2 < 9$ admitem como conjunto solução o intervalo (a, b). Determine o valor de $b - a$.

Exercício 11. Determine o conjunto solução em $U = \mathbb{R}$ das desigualdades $160 < 25x + 10$ e $3x + 6 < 81$.

Exercício 12. Qual o menor número natural x que verifica as desigualdades

$$\frac{4x+2}{3} + x > \frac{2x+1}{2} + 4.$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 13. Determine em $U = \mathbb{R}$ o conjunto solução da desigualdade

$$(x-1)(x+1) + (3x-1)^2 > 6(x+2)^2 + (2x+1)^2$$

Exercício 14. Se $x \in (-1, 1/2)$, então $\dfrac{x}{x-1}$ pertence ao intervalo

a) $(-1/2, 1)$

b) $(-1/2, 3/2)$

c) $(-1, 1/2)$

d) $(-1, 0)$

e) $(0, 1)$

Exercício 15. Se $x \in (-2, 4)$. Determine a qual intervalo a fração $\dfrac{2x+3}{x+3}$ pertence.

a) $(1, 11/7)$.

b) $(-1, 11/7)$.

c) $(-11/7, -1)$.

d) $(-11/7, 1)$.

e) $(-1/2, 4)$

Exercício 16. Determine o conjunto solução em $U = \mathbb{R}$ da desigualdade

$$(2x-1)^2 + x(x+1) + 9 > 5x(x-3) + 2(x-5)$$

Exercício 17. Resolva em $U = \mathbb{R}$ a desigualdade

$$\frac{x+1}{3} + \frac{2x+3}{5} > \frac{3x+2}{4}.$$

Exercício 18. Prove que se $\dfrac{a}{b} > 1$ então

$$\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}, a > 0, b > 0, c > 0.$$

Exercício 19. Determine qual é o maior dos dois números $\dfrac{123456 + 10^{999}}{123457 + 10^{999}}$ e $\dfrac{123457 + 10^{999}}{123458 + 10^{999}}$?

Exercício 20. Qual é o menor inteior positivo n tal que $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0,01$

Exercício 21. Um grilo pode dar pulos de duas distâncias: 9 e 8 metros. Ele disputa uma corrida de 100 metros que vai até a beira de um penhasco. Quantos pulos o grilo deve dar para chegar ao fim da corrida, mas sem passar do ponto final e cair do penhasco?

Exercício 22. Dois inteiros positivos x e y são tais que:

$$\frac{2010}{2011} < \frac{x}{y} < \frac{2011}{2012}.$$

Encontre o menor valor possível para a soma $x + y$.

Exercício 23. Para entrar em um parque, um grupo com dois homens, quatro mulheres e três crianças pagou 226 reais, enquanto que um grupo com três homens, três mulheres e uma criança pagou 207 reais.

a) Quanto pagaria um grupo com 8 homens, 10 mulheres e 5 crianças para entrar no parque?

b) Se os valores dos ingressos são todos números naturais, quantos são os possíveis preços para os ingressos?

Exercício 24. Sejam x, y dois reais quaisquer, com $0 < x < y$. Prove que

$$\sqrt{y-x} > \sqrt{y} - \sqrt{x}.$$

Respostas e Soluções.

1. Se x é a quantidade máxima de chocolates, devemos ter $5x \leq 22$, ou seja, $x \leq \dfrac{22}{5}$. Como x é um inteiro, o número máximo é 4.

2. Se x é a quantidade máxima de carrinhos, devemos ter $24x \leq 171$, ou seja, $x \leq \dfrac{171}{24}$. Como x é um inteiro, o número máximo é 7.

3. A inequação é equivalente a $2x > 10$, ou seja, $x > 5$. Portanto, o conjunto solução é $(5, +\infty)$.

4. A inequação é equivalente a $20x > 260$, ou seja, $x > 13$. Portanto, o conjunto solução é $(13, +\infty)$.

5. A inequação é equivalente a $21x > 63$, ou seja, $x > 3$. Portanto, o conjunto solução é $(3, +\infty)$.

6. Se x é o salário de João, devemos ter $\dfrac{x - 2000}{2} \geq 5000$. Portanto $x \geq 12000$.

7. A inequação é equivalente a $2x > 10$, ou seja, $x > 5$. Portanto, o conjunto solução é $(5, +\infty)$.

8. A inequação é equivalente a $10 > 2x$, ou seja, $x < 5$. Portanto, o conjunto solução é $(-\infty, 5)$.

9. A inequação é equivalente a $260 > 20x$, ou seja, $x < 13$. Portanto, o conjunto solução é $(-\infty, 13)$.

10. As desigualdades são equivalentes a $2 < x$ e $x < 7$. Portanto, $(a, b) = (2, 7)$ e $b - a = 5$.

11. As desigualdades são equivalentes a $6 < x$ e $x < 25$. Portanto, o conjunto solução é $(a, b) = (6, 25)$.

12. Multiplicando a desigualdade por 6, obtemos

$$\begin{aligned} 8x + 4 + 6x &> 6x + 3 + 24 \\ 8x &> 23 \\ x &> 23/8 \end{aligned}$$

Como x deve ser número natural, o menor valor possível é $x = 3$.

13. A desigualdade pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} x^2 - 1 + 9x^2 - 6x + 1 &> 6x^2 + 24x + 24 + 4x^2 + 4x + 1 \\ -25 &> 34x \\ -\frac{25}{34} &> x \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto solução é o intervalo $(-\infty, -25/34)$.

14. Podemos reescrever a fração dada como

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-1} &= \frac{x - 1 + 1}{x - 1} \\ &= \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} \\ &= 1 + \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

De $-1 < x < 1/2$ segue que $-2 < x - 1 < -1/2$. Daí

$$-2 < \frac{1}{x-1} < -\frac{1}{2}.$$

Somando uma unidade aos membros da desigualdade anterior, temos

$$-1 < \frac{x}{x-1} < \frac{1}{2}.$$

A resposta está na letra C.

15. Podemos reescrever a fração dada como

$$\begin{aligned} \frac{2x+3}{x+3} &= \frac{2x + 6 - 3}{x + 3} \\ &= \frac{2(x+3)}{x+3} - \frac{3}{x+3} \\ &= 2 - \frac{3}{x+3} \end{aligned}$$

De $-2 < x < 4$ segue que $1 < x + 3 < 7$. Daí

$$1/7 < \frac{1}{x+3} < 1.$$

Multiplicando tudo por -3 e somando 2 unidades aos membros da desigualdade anterior, temos

$$2 - 3 < 2 - \frac{x}{x-1} < 2 - 3/7,$$

ou seja,

$$-1 < \frac{2x+3}{x+3} < 11/7,$$

A resposta está na letra B.

16. Usando a propriedade distributiva, podemos reescrever os membros da desigualdade

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x + 1 + x^2 + x + 9 &> 5x^2 - 15x + 2x - 10 \\ 10x &> -20 \\ x &> -2 \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto solução é $S = (-2, +\infty)$.

17. Multiplicando a desigualdade dada por $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$, temos a desigualdade equivalente

$$\begin{aligned} 20(x+1) + 12(2x+3) &> 15(3x+2) \\ 20x + 20 + 24x + 36 &> 45x + 30 \\ 26 &> x. \end{aligned}$$

Portanto o conjunto solução é $S = (-\infty, 26)$.

18. (Extraído da Olimpíada Cearense) Como $a > b$ e $c > 0$, segue que

$$\begin{aligned} ac &> bc \\ ac + ab &> bc + ab \\ a(b+c) &> b(a+c) \\ \frac{a}{b} &> \frac{a+c}{b+c} \end{aligned}$$

19. Pelo exercício anterior, tomando $a = 123456 + 10^{999}$, $b = 123457 + 10^{999}$ e $c = 1$, segue que

$$\frac{123456 + 10^{999}}{123457 + 10^{999}} > \frac{123457 + 10^{999}}{123458 + 10^{999}}.$$

20. (Extraído da Olimpíada Cearense) Como

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}},$$

é necessário que

$$2\sqrt{n} > \sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 100$$

Daí $n > 2500$. Para $n = 2501$, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{n} - \sqrt{n-1} &= \frac{1}{50 + \sqrt{2501}} \\ &< \frac{1}{50+50} \\ &= 0,01 \end{aligned}$$

Portanto, o menor inteiro positivo que verifica a desigualdade é $n = 2501$.

21. **Primeira solução:** Suponha que o grilo desse apenas pulos de 9 metros. Em seu décimo segundo pulo ele cairia do penhasco, pois $9 \cdot 12 = 108$m. Como ele pode também dar pulos de 8 metros, basta "trocar" 8 pulos de 9 metros por pulos de 8 metros. Teríamos assim 4 pulos de 9 metros e 8 pulos de 8 metros, num total de $4 + 8 = 12$ pulos.

Essa é a única combinação de pulos possível, pois se o grilo der menos que 4 pulos de 9 metros, as distâncias máximas que ele poderá percorrer sem cair do penhasco são: $3 \cdot 9 + 9 \cdot 8 = 99$m, $2 \cdot 9 + 10 \cdot 8 = 98$m, $1 \cdot 9 + 11 \cdot 8 = 97$m e $0 \cdot 9 + 12 \cdot 8 = 96$m. Além disso, dando mais que 4 pulos de 9 metros, o grilo deve dar menos que 8 pulos de 8 metros e assim as distâncias máximas que ele poderá percorrer sem cair do penhasco são: $5 \cdot 9 + 6 \cdot 8 = 93$m, $6 \cdot 9 + 5 \cdot 8 = 94$m, $7 \cdot 9 + 4 \cdot 8 = 95$m, $8 \cdot 9 + 3 \cdot 8 = 96$m, $9 \cdot 9 + 2 \cdot 8 = 97$m, $10 \cdot 9 + 1 \cdot 8 = 98$m e $11 \cdot 9 + 0 \cdot 8 = 99$m. Como nenhuma dessas distâncias é igual a 100, não existe outra combinação.

Segunda solução: Sejam x o número de pulos de 9m e y o número de pulos de 8m. Queremos determinar $x + y$, sabendo que:

$$\begin{aligned} 100 &= 9x + 8y \\ &= 8(x+y) + x. \end{aligned}$$

Como 100 deixa resto 4 na divisão por 8, o mesmo deve ocorrer com o número $8(x+y) + x$. Ou seja, x deve deixar resto 4 na divisão por 8 pois $8(x+y)$ já é múltiplo de 8. Se $x > 4$, saberemos que x é pelo menos $8 \cdot 1 + 4 = 12$ que é o próximo número que deixa resto 4 por 8 depois de 4. Se o grilo der 12 pulos de 9m, ele chegará a $9 \cdot 12 = 108$m e cairá do penhasco. Logo, $x = 4$ e após sua substituição na equação acima, podemos concluir que $y = (100 - 9 \cdot 4)/8 = 8$. Portanto, o grilo deve dar $4 + 8 = 12$ pulos.

22. Como $\dfrac{2011}{2012} < 1$, temos $x < y$ e assim $x = y - d$, com d inteiro positivo. De

$$\frac{2011 - 1}{2011} < \frac{y-d}{y} < \frac{2012-1}{2012}$$

segue que

$$\frac{1}{2012} < \frac{d}{y} < \frac{1}{2011}.$$

Assim,

$$2011d < y < 2012d. \tag{1}$$

Se $d = 1$, a desigualdade (1) não possui solução inteira. Se $d = 2$, a única possibilidade é $y = 4023$. Nesse caso, $x + y = 8044$. Para $d \geq 3$,

$$\begin{aligned} x + y &= 2y - d \\ &> 4021d \\ &\geq 12063. \end{aligned}$$

Consequentemente, o valor mínimo da soma é obtido com $d = 2$ e nesse caso $x + y = 8044$.

23.

a) Seja h o preço do ingresso para homens, m o preço do ingresso para mulheres e c o preço do ingresso para crianças. Organizando as informações, temos:

$$\begin{cases} 2h + 4m + 3c = 226 & (I) \\ 3h + 3m + c = 207 & (II). \end{cases}$$

Um grupo com 8 homens, 9 mulheres e 5 crianças é o mesmo que um grupo do tipo (I) mais dois grupos do tipo (II), ou seja, pagaria $226 + 2 \cdot 207 = 640$ reais.

b) Fazendo $2(II) - I$, obtemos a equação $4h + 2m = 188$, donde $m = 94 - 2h$, que, substituindo em (II), chegamos a $c = 3h - 75$. A solução para o sistema pode ser escrita como $\{(h, m, c)\} = \{h, 94 - 2h, 3h - 75\}$. Como $m = 94 - 2h > 0$, segue que $h < 47$ e, analogamente, $c = 3h - 75 > 0$, donde $h > 25$. Sendo assim, $25 < h < 47$, que resulta em $46 - 25 = 21$ resultados possíveis.

24. Se $p, q > 0$, como

$$(p^n - q^n) = (p-q)(p^{n-1} + p^{n-2}q + \ldots + pq^{n-2} + q^{n-1}),$$

segue que $p^n - q^n$ e $p - q$ possuem o mesmo sinal. Consequentemente, dados os reais positivos p e q, para qualquer n inteiro positivo vale que:

$$p > q \Leftrightarrow p^n > q^n.$$

Assim,

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{y-x} & > & \sqrt{y} - \sqrt{x} \Leftrightarrow \\
\sqrt{y-x} + \sqrt{x} & > & \sqrt{y} \Leftrightarrow \\
(\sqrt{y-x} + \sqrt{x})^2 & > & y \Leftrightarrow \\
y - x + 2\sqrt{y-x}\sqrt{x} + x & > & y \Leftrightarrow \\
2\sqrt{y-x}\sqrt{x} & > & 0 \Leftrightarrow
\end{array}$$

Como $\sqrt{y-x}, \sqrt{x} > 0$, o resultado segue.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com