Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos

Quantidade de Raízes e Consequências

3° **ano E.M.**

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos
Quantidade de Raízes e Consequências

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Qual a multiplicidade da raiz 4 no polinômio $P(x) = x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 32x - 128$?

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 3.

e) 4.

Exercício 2. Seja o polinômio $P(x) = x^3 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+2)^4$. Determine:

a) O número de raízes.

b) A multiplicidade de cada raiz.

Exercício 3. As raízes de uma função polinomial são 1, 3 e 4, com multiplicidades 4, 3 e 1, respectivamente. Qual é o grau dessa função?

a) 5.

b) 6.

c) 7.

d) 8.

e) 9.

Exercício 4. Sejam duas funções polinomiais $f(x)$ e $g(x)$, cujos graus são 4 e 5, respectivamente. Se -2 é raiz de multiplicidade 3 em f e de multiplicidade 2 em g, qual a multiplicidade da raiz -2 na função $h(x) = f(x) \cdot g(x)$?

a) 3.

b) 4.

c) 5.

d) 6.

e) 9.

Exercício 5. Sabendo que $A(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ é divisível por $B(x) = x^2 - 2x + 1$, então a multiplicidade da raiz 1 em $A(x)$ é:

a) 4.

b) 3.

c) 2.

d) 1.

e) 1 não é raiz de $A(x)$.

Exercício 6. Seja $p(x) = x^4 + kx^3 - 3x^2 + 4x + t$ uma função polinomial, na qual k e t são números reais. O valor de $k + t$ para que -1 seja raiz dupla de $p(x)$ é:

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Exercício 7. Qual a multiplicidade da raiz i no polinômio $P(x) = x^4 - (1+3i)x^3 - (3-3i)x^2 + (3+i)x - i$?

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) i não é raiz de $P(x)$.

Exercício 8. Quantas vezes 1 é raiz do polinômio $P(x) = x^5 + ix^4 - x + a$, sabendo que 1 é raiz pelo menos uma vez?

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Se $R(x) = 4x^4 + 12x^3 + x^2 - 12x + 4$ é divisível por $S(x) = x^2 + 4x + 4$, quais são as raízes de $R(x)$ e suas respectivas multiplicidades?

Exercício 10. Sabendo que 3 é raiz dupla da função polinomial $f(x) = x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 30x + 18$, qual a soma das demais raízes?

a) 1.

b) 2.

c) 3.

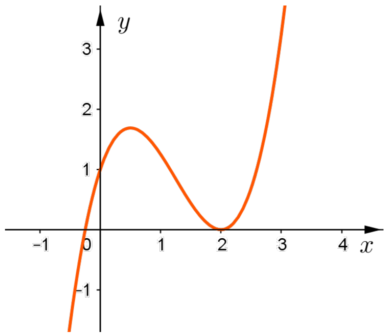
d) 4.

e) 5.

Exercício 11. Determine os valores de a e b, sabendo que $p(x) = x^4 + ax^3 - 7x^2 + ax + b$ possui 1 como raiz dupla.

Exercício 12. Escreva um polinômio que possui 1 como raiz dupla, 2 como raiz simples e -2 como raiz tripla.

Exercício 13. Observe o gráfico da função polinomial $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Determine os valores de b, c e d.



Exercício 14. Determine o conjunto das raízes de $P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3 = 0$, sendo $-i$ raiz dupla e 3 raiz simples.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. No polinômio $p(x) = (x^3 - x^2 + x - 1)^{20}$, a multiplicidade da raiz $x = 1$ é:

a) 1.

b) 18.

c) 9.

d) 20.

e) 40.

Exercício 16. $P(x) = x^3 - 75x + 250$ apresenta $k \in \mathbb{R}$ como raiz dupla e $-2k$ como raiz simples. Determine seu conjunto solução.

Exercício 17. A função polinomial $P(x) = x^5 - 16x^4 + 53x^3 - 64x^2 + 52x - 48 = 0$ possui $x_1 = i$ e $x_2 = -i$ como raízes e, além disso, uma raiz real de multiplicidade 2, x_3 e x_4. Determine x_5.

Exercício 18. Considere as funções $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ e $g(x) = x^2 - 2x + 1$. A multiplicidade das raízes não reais da função composta fog é igual a:

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Exercício 19. Se 1 é uma raiz de multiplicidade 2 na equação $x^4 + x^2 + ax + b = 0$, com a e b reais, então $a^2 - b^3$ é igual a:

a) -64.

b) -36.

c) -28.

d) 18.

e) 27.

Exercício 20. Qual a multiplicidade da raiz 1 no polinômio $P(x) = x^{80} - 1$?

a) 1.

b) 20.

c) 50.

d) 75.

e) 80.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1. Vamos usar o Dispositivo de Briot-Ruffini, com 4 como raiz, quantas vezes for necessário, ou seja, até que o resto seja diferente de zero.

4	1	-10	24	32	-128
4	1	-6	0	32	$\boxed{0}$
4	1	-2	-8	$\boxed{0}$	
4	1	2	$\boxed{0}$		
	1	$\boxed{8}$			

Portanto, 4 é raiz de multiplicidade 3. Resposta D.

2.

a) $3+2+4=9$.

b) 0 tem multiplicidade 3, 1 tem multiplicidade 2 e -2 tem multiplicidade 4.

3. O grau da função é $4+3+1=8$. Resposta D.

4. Quando multiplicamos duas funções, suas raízes são as raízes dos fatores desta multiplicação, ou seja, -2 será raiz de multiplicidade $3+2=5$ da função h. Resposta C.

5. Como $B(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$, então 1 é raiz dupla de $B(x)$. Se $B(x)$ divide $A(x)$, então as raízes de $B(x)$ também são raízes de $A(x)$. Dessa forma, já sabemos que 1 é raiz dupla de $A(x)$. Agora vamos usar o Dispositivo de Briot-Ruffini para verificar se 1 é raiz mais de duas vezes de $A(x)$:

1	1	-4	5	-2
1	1	-3	2	$\boxed{0}$
1	1	-2	$\boxed{0}$	
	1	$\boxed{-1}$		

Como encontramos dois restos iguais a zero, significa que 1 é raiz dupla da função. Resposta C.

6. Se -1 é raiz dupla de $p(x)$, então vamos usá-lo duas vezes no Dispositivo de Briot-Ruffini:

-1	1	k	-3	4	t
-1	1	$k-1$	$-k-2$	$k+6$	$\boxed{-k-6+t}$
	1	$k-2$	$-2k$	$\boxed{3k+6}$	

Os dois restos encontrados devem ser iguais a zero, ou seja, $3k+6=0$, donde $k=-2$, e $-k-6+t=0$, donde $t=4$. Portanto, $k+t=2$. Resposta B.

7. Vamos verificar usando o dispositivo de Briot-Ruffini:

i	1	$-1-3i$	$-3+3i$	$3+i$	$-i$
i	1	$-1-2i$	$-1+2i$	1	$\boxed{0}$
i	1	$-1-i$	i	$\boxed{0}$	
	1	-1	$\boxed{0}$		

Como encontramos 3 restos iguais a zero e a última raiz vem da expressão encontrada $x-1$, concluímos que i é raiz tripla do polinômio. Resposta C.

8. Como 1 é raiz, substituindo no polinômio, temos $P(1)=1^5+i\cdot 1^4-1+a=0$, donde $a=-i$. Sendo assim, vamos verificar a multiplicidade da raiz 1 utilizando o Dispositivo de Briot-Ruffini:

1	1	i	0	0	-1	$-i$
1	1	$1+i$	$1+i$	$1+i$	i	$\boxed{0}$
	1	$2+i$	$3+2i$	$4+3i$	$\boxed{4+4i}$	

Portanto, 1 é raiz simples do polinômio. Resposta A.

9. Como $S(x)=x^2+4x+4=(x+2)^2$, então suas raízes são $x_1=x_2=-2$, ou seja, -2 é raiz de multiplicidade 2 de $S(x)$. Além disso, se $S(x)$ divide $R(x)$, então as raízes de $S(x)$ são também raízes de $R(x)$, ou seja, -2 é raiz dupla de $R(x)$. Sendo assim, usando o dispositivo de Briot-Ruffini, vamos encontrar as demais raízes de $R(x)$:

-2	4	12	1	-12	4
-2	4	4	-7	2	$\boxed{0}$
	4	-4	1	$\boxed{0}$	

Chegamos, assim, ao quociente $4x^2-4x+1$, cujas raízes são $x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-16}}{8}=\dfrac{4\pm 0}{8}$, ou seja, $x_3=x_4=\dfrac{1}{2}$. Portanto, as raízes de $R(x)$ são -2 e $\dfrac{1}{2}$, ambas de multiplicidade 2.

10. Aplicando o Dispositivo de Briot-Ruffini, sendo 3 raiz dupla, temos:

3	1	-8	23	-30	18
3	1	-5	8	-6	$\boxed{0}$
	1	-2	2	$\boxed{0}$	

Chegamos ao quociente x^2-2x+2, que contém as outras duas raízes de $f(x)$, cuja soma é 2. Resposta B.

11. Se 1 é raiz dupla, vamos usar o dispositivo de Briot-Ruffini duas vezes:

$$\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & a & -7 & a & b \\ \hline
1 & 1 & a+1 & a-6 & 2a-6 & \boxed{2a-6+b} \\ \hline
 & 1 & a+2 & 2a-4 & \boxed{4a-10} &
\end{array}$$

Como os dois restos encontrados devem ser iguais a zero, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 2a-6+b &= 0 \\ 4a-10 &= 0. \end{cases}$$

Resolvendo-o, chegamos a $a = \dfrac{5}{2}$ e $b = 1$.

12. Como temos as raízes do polinômio, podemos escrevê-lo como:

$$\begin{aligned}
P(x) &= a(x-1)^2(x-2)(x+2)^3 \\
&= a(x^2-2x+1)(x-2)(x+2)(x+2)^2 \\
&= a(x^2-2x+1)(x^2-4)(x^2+4x+4) \\
&= a(x^4-2x^3-3x^2+8x-4)(x^2+4x+4) \\
&= a(x^6+2x^5-7x^4-12x^3+16x^2+16x-16).
\end{aligned}$$

Podemos agora gerar qualquer polinômio a partir de algum valor a, sendo a qualquer complexo, por exemplo, para $a = 1$, temos $P(x) = x^6+2x^5-7x^4-12x^3+16x^2+16x-16$.

13. Vemos, pelo gráfico, que $x_1 = x_2 = 2$ e que $f(0) = 1$. Podemos então escrever a função como $f(x) = (x-2)^2(x-x_3)$. Fazendo $x = 0$, temos $f(0) = (-2)^2(-x_3) = 1$, donde $x_3 = -\dfrac{1}{4}$. Reescrevendo a equação, chegamos a $f(x) = (x-2)^2\left(x+\dfrac{1}{4}\right) = x^3 - \dfrac{15}{4}x^2 + 3x + 1$, ou seja, $b = -\dfrac{15}{4}$, $c = 3$ e $d = 1$.

14. Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, sabendo que $-i$ é raiz dupla, e 3 é raiz simples, ou seja $x_1 = x_2 = -i$ e $x_3 = 3$, temos:

$$\begin{array}{c|cccccc}
-i & 1 & -3 & 2 & -6 & 1 & -3 \\ \hline
-i & 1 & -3-i & 1+3i & -3-i & 3i & \boxed{0} \\ \hline
3 & 1 & -3-2i & -1+6i & 3 & \boxed{0} & \\ \hline
 & 1 & -2i & -1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

As duas raízes restantes podemos encontrar na expressão do quociente $x^2 - 2ix - 1$, que são $x = \dfrac{2i \pm \sqrt{-4+4}}{2} = \dfrac{2i \pm 0}{2}$, ou seja, $x_4 = x_5 = i$.

15. (Extraído da Mackenzie-SP - adaptado) Temos que:

$$\begin{aligned}
x^3 - x^2 + x - 1 &= \\
x^2(x-1) + (x-1) &= \\
(x-1)(x^2+1).&
\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever $p(x)$ como $p(x) = \left[(x-1)(x^2+1)\right]^{20} = (x-1)^{20}(x^2+1)^{20}$. Como 1 não é raiz de x^2+1, mas apenas de $x-1$, então é raiz de multiplicidade 20. Resposta D.

16. Usando o Dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{c|cccc}
k & 1 & 0 & -75 & 250 \\ \hline
k & 1 & k & k^2-75 & \boxed{k^3-75k+250} \\ \hline
 & 1 & 2k & \boxed{3k^2-75} &
\end{array}$$

Como os restos das divisões sucessivas devem ser iguais a zero, temos $3k^2 - 75 = 0$, donde $k = \pm 5$, mas como $k^3 - 75k + 250 = 0$, então o único valor válido é $k = 5$. Portanto, as raízes da equação são $x_1 = x_2 = 5$ e $x_3 = -10$, cujo conjunto solução é $\{-10, 5\}$.

17. Conhecemos duas das raízes e sabemos que existem outras duas iguais, ou seja, $x_3 = x_4 = a$. Aplicando o Dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{c|cccccc}
i & 1 & -16 & 53 & -64 & 52 & -48 \\ \hline
-i & 1 & -16+i & 52-16i & -48+52i & -48i & \boxed{0} \\ \hline
a & 1 & -16 & 52 & -48 & \boxed{0} & \\ \hline
a & 1 & -16+a & a^2-16a+52 & \boxed{*} & & \\ \hline
 & 1 & -16+2a & \boxed{3a^2-32a+52} & & &
\end{array}$$

$* = a^3 - 16a^2 + 52a - 48$.
Todos os quatro restos devem ser iguais a zero, ou seja, $3a^2 - 32a + 52 = 0$, donde $a = 2$ ou $a = \dfrac{26}{3}$, mas verificando no polinômio, apenas $a = 2$ é válido. Dessa forma, restou-nos, após as sucessivas divisões, o polinômio $x - 16 + 2a$, cuja raiz é $x_5 = 12$.

18. (Extraído do ITA) Por inspeção, vemos que 1 é raiz de f. Temos, então:

$$\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ \hline
 & 1 & 3 & 3 & 1 & \boxed{0} \\ \hline
\end{array}$$

Obtemos agora a função quociente $x + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$. Dessa forma, podemos escrever f como $f(x) = (x-1)(x+1)^3$, ou seja, 1 é raiz simples de f e -1 é raiz tripla.

Como estamos procurando as raízes de $fog(x) = f(g(x))$ e $f(1) = 0$ e $f(-1) = 0$, então devemos fazer $g(x) = 1$ e $g(x) = -1$. No primeiro caso temos $x^2 - 2x + 1 = 1$, segue $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$, ambas raízes simples; no segundo caso, no qual todas as raízes encontradas serão triplas, temos $x^2 - 2x + 1 = -1$, donde $x_3 = x_4 = x_5 = 1 + i$ e $x_6 = x_7 = x_8 = 1 - i$. Portanto, a multiplicidade das raízes não reais é 3. Resposta C.

19. (Extraído do ITA) Vamos aplicar o Dispositivo de Briot-Ruffini com as raízes conhecidas, $x_1 = x_2 = 1$:

$$\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & a & b \\
\hline
1 & 1 & 1 & 2 & a+2 & \boxed{a+b+2} \\
\hline
 & 1 & 2 & 4 & \boxed{a+6} &
\end{array}$$

Como os restos das divisões sucessivas devem ser ambos iguais a zero, temos $a + 6 = 0$, segue que $a = -6$, e $a + b + 2 = 0$, donde $b = 4$. Portanto, $a^2 - b^3 = 36 - 64 = -28$. Resposta C.

20. Temos:

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^{80} - 1 \\
&= (x^{40} + 1)(x^{40} - 1) \\
&= (x^{40} + 1)(x^{20} + 1)(x^{20} - 1) \\
&= (x^{40} + 1)(x^{20} + 1)(x^{10} + 1)(x^{10} - 1) \\
&= (x^{40} + 1)(x^{20} + 1)(x^{10} + 1)(x^5 + 1)(x^5 - 1).
\end{aligned}$$

De todos os fatores, 1 é raiz apenas do último, sendo raiz simples, inclusive. Resposta A.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com