Módulo de Progressões Aritméticas

Definição e Lei de Formação

1^a **série E.M.**

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Progressões Aritméticas
Definição e Lei de Formação

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Uma *progressão aritmética*, costumeiramente chamada de *P.A.*, é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com um valor fixo chamado de diferença comum (simbolizado pela letra d) ou razão da progressão (destacado como r). Por exemplo, a sequência abaixo é uma progressão aritmética com termo inicial 3 e diferença comum 4.

$$\begin{array}{llll} a_1 = 3, & a_2 = 7, & a_3 = 11, & \\ a_4 = 15, & a_5 = 19, & a_6 = 23, & \\ a_7 = 27, & a_8 = 31, & a_9 = 35, & \ldots \end{array}$$

Veja que estamos denotando o número da posição i pelo símbolo a_i.

a) Se o primeiro termo de uma progressão aritmética é 2 e sua diferença comum é 3, qual é o valor do quarto termo?

b) Qual o valor da razão de uma P.A. cujo primeiro termo é -3 e o quinto termo vale 17?

c) Na progressão aritmética $(\ldots, 3, 15, 27, 39, 51, \ldots)$, sabe-se que $a_{36} = 231$. Observando a posição do termo $a_y = 27$, qual o valor de y?

d) A professora de João pediu que ele calculasse o décimo primeiro termo de uma progressão aritmética. Infelizmente ele esqueceu qual era o termo inicial e a diferença comum. As únicas informações das quais ele lembrava eram:

$$\begin{aligned} a_4 + a_7 + a_{10} &= 207 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} &= 553. \end{aligned}$$

Quanto vale o décimo primeiro termo?

Exercício 2. Maria começou a guardar moedas de 1 real com o intuito de juntar dinheiro para comprar um celular em 6 meses. Ela começou com dois reais e a cada dia juntava mais 3 reais do lanche, como ilustra a figura abaixo.

Figura: OlabsMathematics/ArithmeticProgression

Ao final de 182 dias quanto dinheiro ela terá guardado?

Exercício 3. A taxa de um determinado condomínio da cidade de Fortaleza é paga de acordo com o andar em que se mora. Quem mora no 1° andar paga R\$ 105,00; no 2° andar paga R\$ 120,00. Sabendo que os valores a serem pagos estão em progressão aritmética, quanto pagará, em reais, quem mora no décimo andar desse condomínio?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Os comprimentos dos degraus da escada abaixo diferem uniformemente em 2 cm entre os vizinhos de cima para baixo.

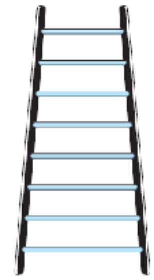


Imagem:
http://www.ekshiksha.org.in/eContent-Show.do?documentId=206

O degrau mais inferior mede 45 cm. Qual a medida do segundo degrau de cima para baixo?

Exercício 5. A sequência dos números pentagonais está ilustrada na figura abaixo:

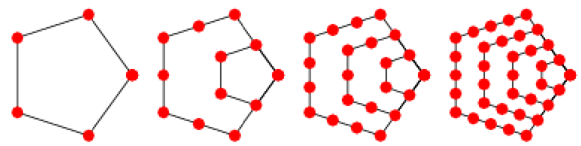


Figura: http://mathworld.wolfram.com/PentagonalNumber.html

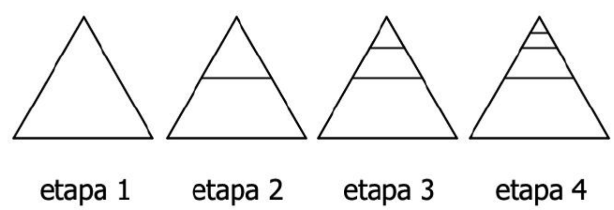
Fazendo apenas a contagem de pontos em cada borda externa (perímetro) em cada pentágono chegaremos a:

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \\ a_2 &= 10 \\ a_3 &= 15 \\ a_4 &= 20. \end{aligned}$$

Sendo assim, qual o valor de a_{20}?

Exercício 6. Os lados de triangulo formam uma progressão aritmética de razão 1 e o maior ângulo é o dobro do menor. Determine o valor dos lados desse triangulo.

Exercício 7. Considere o padrão de construção representado pelos desenhos abaixo.



Na etapa 1, há um único triângulo equilátero. Na etapa 2, é traçado um segmento a partir dos pontos médios de dois lados do triângulo da etapa 1, formando dois triângulos equiláteros. Na etapa 3, é traçado um segmento a partir dos pontos médios de dois lados do triângulo menor da etapa 2, formando três triângulos equiláteros. Na etapa 4 e nas etapas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos triângulos menores da etapa anterior.
Qual o número de trapézios na 6^a etapa de construção?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 8. Na situação apresentada nos quadrinhos a seguir, as distâncias, em quilômetros, d_{AB}, d_{BC} e d_{CD} formam, nesta ordem, os três primeiros termos de uma progressão aritmética.

Qual o valor do décimo terceiro termo dessa progressão?

Exercício 9. O triângulo aritmético de Fibonacci é formado pelos números ímpares inteiros positivos a partir do 1 dispostos em linhas com ordem crescente em cada linha e pulando para a linha seguinte. A linha n possui exatamente n números. Veja as quatro primeiras linhas.

Linha 1:	**1**
Linha 2:	**3 5**
Linha 3:	**7 9 11**
Linha 4:	**13 15 17 19**
	⋮

Em qual linha aparecerá o 2013?

Exercício 10. Sobre quantidade de múltiplos de um dado inteiro, responda

a) Quantos múltiplos de 13 há entre 100 e 200?

b) Quantos múltiplos de 17 há entre 1000 e 2000?

Exercício 11. Na progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, sabe-se que $a_2 + a_5 = 9$ e $3a_5 - a_3 = 16$. Então, quanto vale $\dfrac{a_5}{a_2}$?

Exercício 12. Sabe-se que no triângulo ABC os lados estão em progressão aritmética de razão t. Qual a distância entre o incentro e o baricentro deste triângulo, em função de t?

Exercício 13. Demonstre que se entre os infinitos termos de uma progressão aritmética de inteiros positivos existe um quadrado perfeito, então existem infinitos quadrados perfeitos na mesma progressão.

Respostas e Soluções.

1.

a) Se $a_1 = 2$ e $r = 3$, temos

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 3 = 5 \\ a_3 &= a_2 + 3 = 8 \\ a_4 &= a_3 + 3 = 11. \end{aligned}$$

b) Como $a_1 = -3$ e $a_5 = 17$, temos

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 + 4r \\ 17 &= -3 + 4r \\ 4r &= 20 \\ r &= 5. \end{aligned}$$

c) **(Adaptado do vestibular do IFPE** $-$ **2015)**
Perceba que a diferença comum é igual a

$$15 - 3 = 27 - 15 = 39 - 27 = 12.$$

Assim, podemos escrever que

$$\begin{aligned} a_{36} &= 231 \\ a_1 + 35 \cdot 12 &= 231 \\ a_1 &= 231 - 420 = -189. \end{aligned}$$

e, daí

$$\begin{aligned} a_y &= 27 \\ a_1 + (y-1) \cdot 12 &= 27 \\ -189 + 12y - 12 &= 27 \\ 12y &= 228 \\ y &= 19. \end{aligned}$$

d) Sejam $a_1 = d$ e r a razão. Então, temos:

$$\begin{array}{lll} a_1 = d, & a_2 = d + r, & a_3 = d + 2r, \\ a_4 = d + 3r, & a_5 = d + 4r, & a_6 = d + 5r, \\ a_7 = d + 6r, & a_8 = d + 7r, & a_9 = d + 8r, \\ a_{10} = d + 9r, & a_{11} = d + 10r. & \end{array}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_4 + a_7 + a_{10} &= (d + 3r) + (d + 6r) + (d + 9r) \\ 217 &= 3(d + 6r). \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} &= (d + 4r) + (d + 5r) + \ldots + (d + 10r) \\ 553 &= 7(d + 7r). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{cases} d + 6r = 207/3 = 69, \\ d + 7r = 553/7 = 79. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior, obtemos $r = 10$ e $d = 9$. Assim, $a_{11} = d + 10r = 109$.

2. Ao final de 182 dias Maria terá

$$\begin{aligned} a_{182} &= a_1 + 181 \cdot 3 \\ a_{182} &= 2 + 181 \cdot 3 \\ a_{182} &= 2 + 181 \cdot 3 = 545 \text{ reais.} \end{aligned}$$

3. (Adaptado do vestibular da UNIFOR $-$ **2015)**
Observe que a diferença comum vale 15 reais. Sendo assim, quem mora do 10° andar pagará

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_1 + 9 \cdot 15 \\ a_{10} &= 105 + 135 \\ a_{10} &= 150 \text{ reais.} \end{aligned}$$

4. Observe que, de baixo para cima, a diferença comum vale (-2) cm. Sendo assim, o segundo degrau de cima para baixo é o mesmo que o penúltimo degrau de baixo para cima e ele mede

$$\begin{aligned} a_7 &= 45 + 6 \cdot (-2) \\ a_7 &= 45 - 12 \\ a_7 &= 33 \text{ cm.} \end{aligned}$$

5. Observe que a diferença comum d é igual a 5. Além disso, podemos escrever que $a_{20} = a_1 + 19d$, o que resulta em

$$\begin{aligned} a_{20} &= a_1 + 19d \\ a_{20} &= 5 + 19 \cdot 5 \\ a_{20} &= 100. \end{aligned}$$

6. Sejam a, b e c as medidas dos lados, $a < b < c$, e α o menor ângulo. Daí, podemos escrever que

$$\begin{aligned} b &= a + 1, \\ c &= a + 2 \text{ e} \\ 2b &= a + c. \end{aligned}$$

Agora, aplicando a lei dos senos, temos que

$$\begin{aligned} \frac{c}{\operatorname{sen}(2\alpha)} &= \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} \\ \frac{c}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} &= \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} \\ \cos\alpha &= \frac{c}{2a}. \end{aligned}$$

Seguindo para a lei dos cossenos, chegaremos a

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \left(\frac{c}{2a}\right) \\ a^3 &= b^2 a + c^2 a - bc^2 \\ a^3 &= (a+1)^2 \cdot a + (a+2)^2 \cdot a - (a+1)(a+2)^2 \\ a^2 - 3a - 4 &= 0, \end{aligned}$$

o que resulta como soluções em $a = -1$, que não convém, e $a = 4$. Donde concluímos $a = 4$, $b = 5$ e $c = 6$.

7. (Adaptado do vestibular da UFRGS − 2015)
A percepção da sequência agora é um pouco mais difícil, pois cada novo termo contará com o mesmo valor do anterior mais o novo trapézio mais o número de trapézios individuais (sem composição de figuras) da etapa anteiror, que chamaremos de t_i, com o índice i em referência à posição anterior à calculada. Sendo assim, perceba que Assim, podemos escrever que

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0\\
a_2 &= a_1 + 1 + t_1 = 1\\
a_3 &= a_2 + 1 + t_2 = 3\\
a_4 &= a_3 + 1 + t_3 = 6\\
a_5 &= a_4 + 1 + t_4 = 10\\
a_6 &= a_5 + 1 + t_5 = 15.
\end{aligned}$$

8. (Adaptado do vestibular da UERJ − 2015)
Considere $d_{AB} = x$, $d_{BC} = y$ e $d_{CD} = x$ e poderemos arrumar do enunciado que

$$\begin{aligned}
x &= y + 10\\
y &= z + 10\\
d_{AD} = x + y + z &= 390 \text{ km}.
\end{aligned}$$

O que permite escrevermos

$$\begin{aligned}
x + y + z &= 390\\
z + 20 + z + 10 + z &= 390\\
3z &= 360\\
z &= 120 \text{ km}.
\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever a P.A. $(140, 130, 120)$ e décimo terceiro termo é

$$\begin{aligned}
a_{13} &= a_1 + 12d\\
a_{13} &= 140 + 12 \cdot (-10)\\
a_{13} &= 20.
\end{aligned}$$

9. (Adaptado da OBM − 2013)

Note que na linha k aparecem exatamente os k ímpares que ainda não estão nas linhas anteriores e que o último número ímpar de uma linha j qualquer é o $\left[\dfrac{j \cdot (j+1)}{2}\right]$ −ésimo impar. Dessa forma, temos que os k ímpares da linha k estão compreendidos no intervalo de $\left[\dfrac{(k-1) \cdot k}{2} + 1\right]$ até $\left[\dfrac{(k+1) \cdot k}{2}\right]$. Como 2013 é o 1007° ímpar, para encontrarmos sua linha, devemos encontrar k inteiro que satisfaça:

$$\frac{(k-1) \cdot k}{2} + 1 < 1007 < \frac{(k+1) \cdot k}{2}.$$

A primeira desigualdade implica $(k-1)^2 < 2 \cdot 1006$, ou seja, $k < \sqrt{2012} + 1 < 46$. A segunda desigualdade implica $\dfrac{8057}{4} < \left(k + \dfrac{1}{2}\right)^2$ e, consequentemente, $\dfrac{\sqrt{8057}}{2} - \dfrac{1}{2} < k$. O único inteiro nesse intervalo é $k = 45$.

10. (Adaptado do vestibular da PUC RJ − 2015)
Para encontrar os primeiro e último termos das sequências, basta dividirmos os valores e observamos os restos.

a) Ao dividir 100 por 13 obtemos como o resto 9, então faltam 4 unidades para o próximo múltiplo de 13 que é o 104. Aplicando lógica semelhante com o 200 obtemos resto 5, agora temos que olhar o múltiplo anterior (afinal, o posterior não pertence ao intervalo definido), o último então é o 195. Assim, podemos escrever $a_1 = 104$, $d = 13$, $a_n = 195$. Daí,

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + (n-1)d\\
195 &= 104 + (n-1) \cdot 13\\
15 &= 8 + (n-1) \cdot 1\\
7 &= n - 1\\
n &= 8.
\end{aligned}$$

b) Ao dividir 1000 por 17 obtemos como o resto 14, então faltam 3 unidades para o próximo múltiplo de 17 que é o 1003. Aplicando argumento semelhante com o 2000 obtemos resto 11. Agora temos que olhar o múltiplo anterior (afinal, o posterior não pertence ao intervalo definido), o último então é o 1989. Assim, podemos escrever $a_1 = 1003$, $d = 17$, $a_n = 1989$. Daí,

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + (n-1)d\\
1989 &= 1003 + (n-1) \cdot 17\\
117 &= 59 + (n-1) \cdot 1\\
58 &= n - 1\\
n &= 59.
\end{aligned}$$

11. (Adaptado do vestibular da USP − 2014)
Podemos escrever $a_2 + a_5 = 9$ e $3a_5 - a_3 = 16$ como um sistema em função de $a_1 = x$ e diferença comum d:

$$\begin{aligned}
a_1 + d + a_1 + 4d &= 9\\
3 \cdot (a_1 + 4d) - a_1 - 2d &= 16
\end{aligned}$$

o que resulta em

$$\begin{aligned}
2x + 5d &= 9\\
2x + 10d &= 16,
\end{aligned}$$

chegando a $x = a_1 = 1$ e $d = \dfrac{7}{5}$. Por fim,

$$\begin{aligned}
\frac{a_5}{a_2} &= \frac{a_1 + 4d}{a_1 + d}\\
&= \frac{1 + 4 \cdot \frac{7}{5}}{1 + \frac{7}{5}}\\
&= \frac{33}{12} = \frac{11}{4}.
\end{aligned}$$

12. (Adaptado da OBM)
Sejam $(AB, AC, BC) = (b - t, b, b + t)$ a progressão aritmética de razão t, G o baricentro de ABC, I o incentro de ABC e $r = d_{\{I,AC\}} = d_{\{I,AB\}} = d_{\{I,BC\}}$ o inraio de ABC.

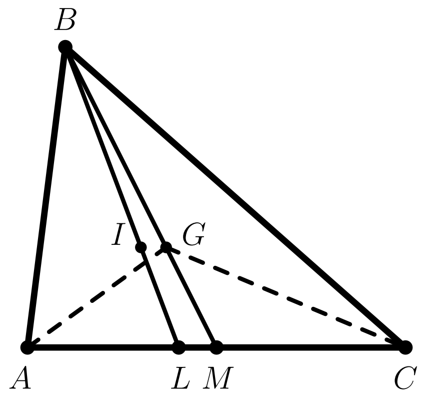


Figura 1

Como $GM = \dfrac{BM}{3}$, temos a área do $\triangle AGC$ um terço da área de $\triangle ABC$. Sendo assim, chegamos a

$$\begin{aligned}
S_{\triangle ABC} &= \frac{r(b-t+b+b+t)}{2} = \frac{3br}{2};\\
S_{\triangle AGC} &= \frac{S_{\triangle ABC}}{3} = \frac{br}{2};\\
S_{\triangle AGC} &= \frac{AC \cdot d_{\{G,AC\}}}{2};\\
d_{\{G,AC\}} &= r; \text{ e } d_{\{G,AC\}} = d_{\{I,AC\}}.
\end{aligned}$$

Portanto, as distâncias de I e G a AC são iguais, o que prova que GI é paralelo a AC, logo:

- como BL a bissetriz de $A\hat{B}C$ e M o ponto médio de AC, temos $AM = \dfrac{b}{2}$ e, pelo teorema da bissetriz interna [1], obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{AL}{AB} &= \frac{LC}{BC} = \frac{AL+LC}{AB+BC}\\
\frac{AL}{AB} &= \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}\\
2 \cdot AL &= AB\\
AL &= \frac{b-t}{2}.
\end{aligned}$$

  Assim, $LM = AM - AL = \dfrac{b}{2} - \dfrac{b-t}{2} = \dfrac{t}{2}$.

- os triângulos BLM e BIG são semelhantes, com

$$\begin{aligned}
\frac{IG}{LM} &= \frac{BG}{BM} = \frac{2}{3}\\
IG &= \frac{2}{3} \cdot LM\\
IG &= \frac{2}{3} \cdot \frac{t}{2} = \frac{t}{3}.
\end{aligned}$$

13. (Extraído da Olimpíada da Espanha)
Seja r a razão de modo que tenhamos $x^2 = a_0 + kr$. Agora tome $(x+r)^2$.

$$\begin{aligned}
(x+r)^2 &= x^2 + (2xr + r^2)\\
&= a_0 + kr + (2xr + r^2)\\
&= a_0 + (k + 2x + r)r.
\end{aligned}$$

Note que achamos um novo quadrado perfeito maior que o anterior que pertence também a mesma P.A. Analogamente, podemos afirmar que $(x+2r)^2$ pertence a mesma P.A. e, repetindo o argumento, todos os termos $(x+nr)^2$ são quadrados perfeitos que pertencem a P.A. ■

[1] Também conhecido informalmente como Teorema da Bailarina.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com