Módulo Problemas Envolvendo Áreas

Problemas Envolvendo Áreas

9° ano E.F.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Problemas Envolvendo Áreas

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. A área de um quadrado de lado medindo x é:

a) $2x$.

b) x^2.

c) $4x$.

d) x.

Exercício 2. O polígono cuja área pode ser calculada pela metade do produto da medida de sua base pela altura relativa a essa base é:

a) um triângulo.

b) um hexágono.

c) um quadrilátero.

d) um trapézio.

Exercício 3. Seja um losango cujas diagonais medem D e d. Qual sua área?

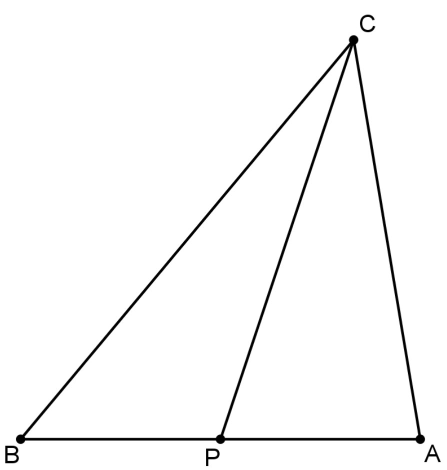
a) $D + d$.

b) $\dfrac{D+d}{2}$.

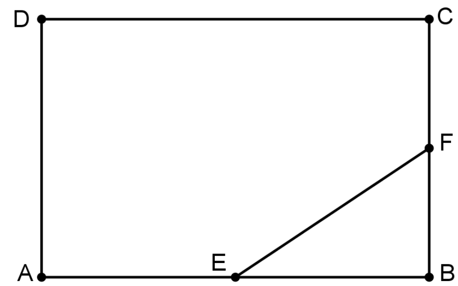
c) $\dfrac{D \cdot d}{2}$.

d) $D \cdot d$.

Exercício 4. Na figura, P é ponto médio do lado AB. Se a área $[ACP]$ é 2, qual a área $[BCP]$?



Exercício 5. No retângulo da figura, cuja área é $12cm^2$, E e F são pontos médios dos lados AB e BC, respectivamente. Determine a área do triângulo EBF.



Exercício 6. Se a razão de semelhança de dois polígonos é k, então a razão entre suas áreas é:

a) k.

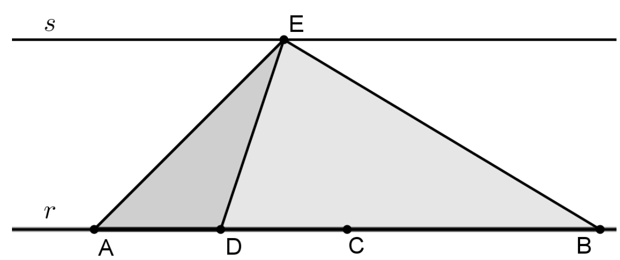
b) $2k$.

c) k^2.

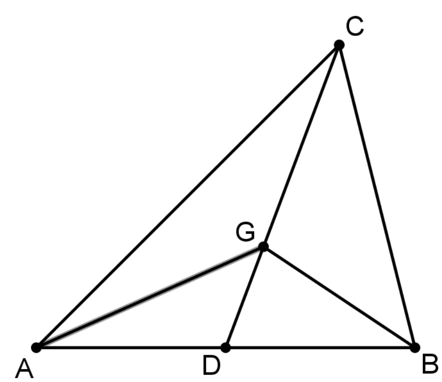
d) $4k$.

2 Exercícios de Fixação

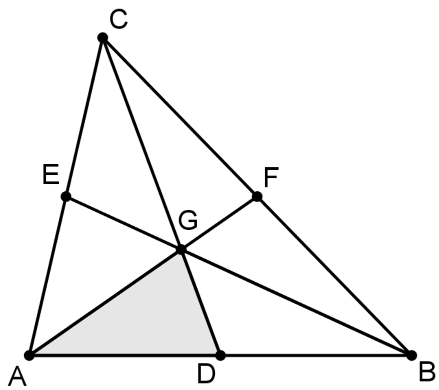
Exercício 7. Sejam duas retas paralelas r e s. Sobre r, marcam-se os pontos A e B; em seguida, marca-se o ponto C, que é ponto médio de AB; na sequência, marca-se ponto D que é ponto médio de AC; por fim, marca-se o ponto E em s. Se $[ADE] = 4cm^2$, determine $[ABE]$.



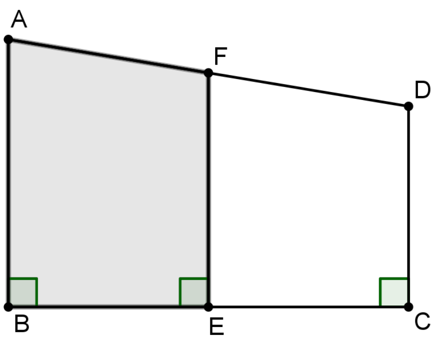
Exercício 8. No triângulo da figura, G é o baricentro. Se a área do triângulo ABC é $15cm^2$, determine a área do triângulo ABG.



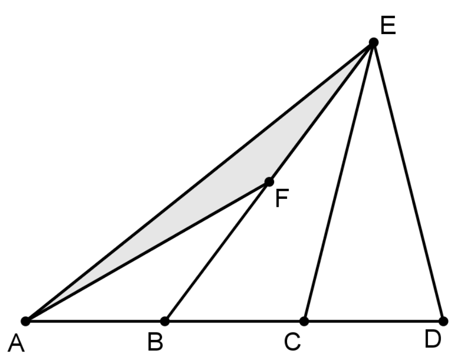
Exercício 9. No triângulo ABC da figura, D, E e F são pontos médios dos lados AB, AC e BC, respectivamente. Se a área do triângulo ABC é $24cm^2$, determine a área do triângulo ADG.



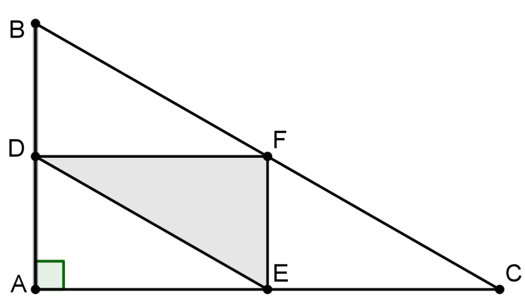
Exercício 10. Determine a área do quadrilátero $ABEF$ na figura, sendo E e F pontos médios dos lados BC e AD, respectivamente, e $AB = 6cm$, $BC = 8cm$ e $CD = 4cm$.



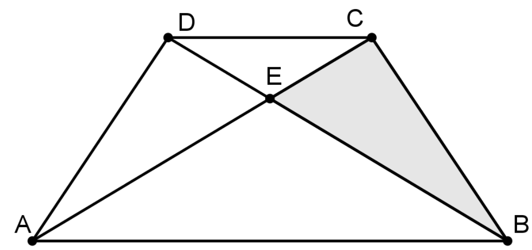
Exercício 11. Seja um triângulo ADE de área $18cm^2$, onde o lado AD é dividido em três partes iguais pelos pontos B e C. Marcando-se o ponto médio F do segmento BE, determine a área do triângulo AFE.



Exercício 12. Seja uma triângulo retângulo , tal que $AB = 6cm$, $AC = 8cm$ e $BC = 10cm$. Marcando-se os pontos médios D, E e F nos lados AB, AC e BC respectivamente, determine a área do triângulo DEF.

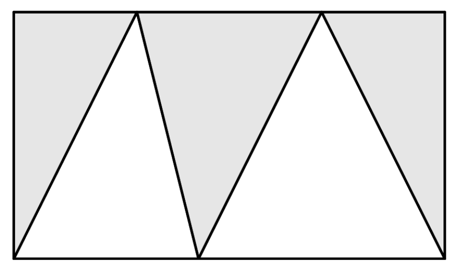


Exercício 13. Na figura temos um trapézio isósceles, no qual a base AB mede o dobro da base CD e E é a interseção das diagonais. Se a área do trapézio é T, qual a área do triângulo BEC?



Exercício 14. Em um quadrilátero convexo $ABCD$ de área $20cm^2$, marcam-se os pontos médios E, F, G e H aos lados AB, BC, CD e AD, respectivamente. Determine a área do quadrilátero $EFGH$.

Exercício 15. Determine a área cinza no retângulo abaixo, cuja área é $50cm^2$.



3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja $7m$ maior do que a largura.

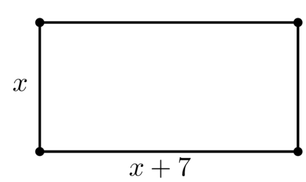


Figura A

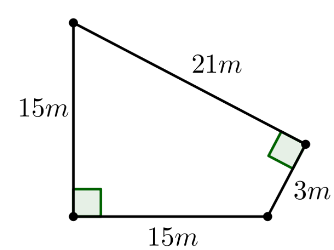


Figura B

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a:

a) $7,5$ e $14,5$.

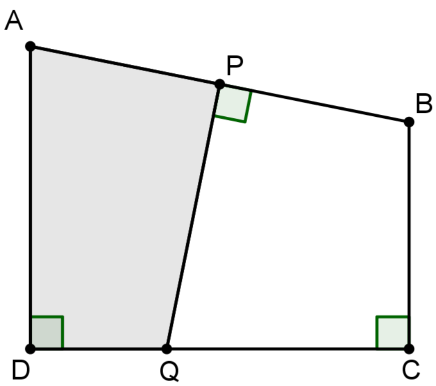
b) $9,0$ e $16,0$.

c) $9,3$ e $16,3$.

d) $10,0$ e $17,0$.

e) $13,5$ e $20,5$.

Exercício 17. Na figura, temos o trapézio retângulo $ABCD$. Se P é ponto médio do lado AB, $AD = 9$, $BC = 7$ e $CD = 8$, determine a área do quadrilátero $APQD$.



Exercício 18. Se ABC é um triângulo equilátero e P um ponto qualquer em seu interior. Mostre que a soma das distâncias de P aos lados é constante.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

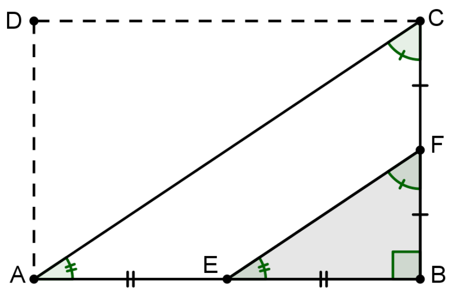
1. B.

2. A.

3. C.

4. Se P é ponto médio de AB, então $PA = PB$. Temos também que as alturas dos triângulos BCP e ACP, relativas aos lados BP e AP, respectivamente, são congruentes. Portanto, $[BCP] = [ACP] = 2$.

5. Traçando a diagonal AC, temos o triângulo ABC, de base AC, cuja área é a metade da área do retângulo $ABCD$, ou seja, $6cm^2$. Como E e F são pontos médios dos lados AB e BC, deste triângulo, então os triângulos ABC e EBF são semelhantes, sendo 2 a razão de semelhança. Assim, $[ABC] = 2^2 \cdot [EBF]$, segue que $[EBF] = \dfrac{6}{4} = 1,5cm^2$.



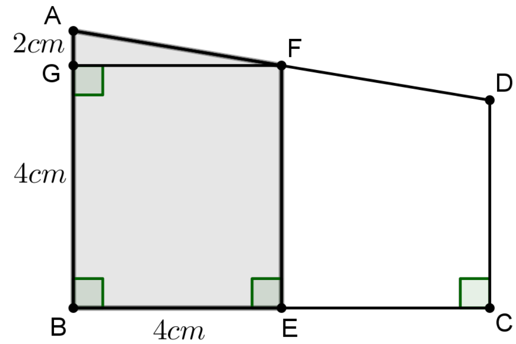
6. C.

7. As alturas dos triângulos ADE e ABE são congruentes, que é a distância entre as retas r e s. Como $AD = \dfrac{AC}{2}$ e $AC = \dfrac{AB}{2}$, então $AD = \dfrac{AB}{4}$, ou seja, $[ADE] = \dfrac{[ABE]}{4}$, segue que $[ABE] = 4 \cdot 4 = 16cm^2$.

8. As bases dos triângulos $[ABC]$ e $[ABG]$ são congruentes (AB). Como G é baricentro, então $CD = 3GD$ e, por consequência, suas alturas também estão na proporção $1:3$, bem como suas áreas, já que a base é a mesma. Portanto, $[ABG] = \dfrac{[ABC]}{3} = 5cm^2$.

9. (Extraído da Vídeo Aula) Temos que $[ABG] = \dfrac{[ABC]}{3} = \dfrac{24}{3} = 8cm^2$ (verifique solução do exercício anterior). Como D é ponto médio de AB, então as áreas dos triângulos ADG e BDG é a mesma. Sendo assim, $[ADG] = \dfrac{[ABG]}{2} = \dfrac{8}{2} = 4cm^2$.

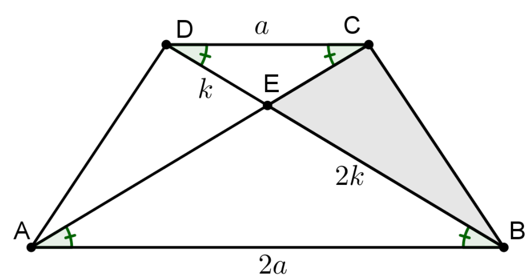
10. Traçando uma reta paralela a BC pelo ponto F, e marcando sua interseção G com AB, dividimos a área do trapézio $ABEF$ em duas partes: um quadrado $GBEF$, de área igual a $4^2 = 16cm^2$; e um triângulo AGF de base $GF = 4cm$ e altura $AG = 2cm$, ou seja, de área igual a $\dfrac{4 \cdot 2}{2} = 4cm^2$. Portanto,a área do quadrilátero $ABEF$ é igual a $16 + 4 = 20cm^2$.



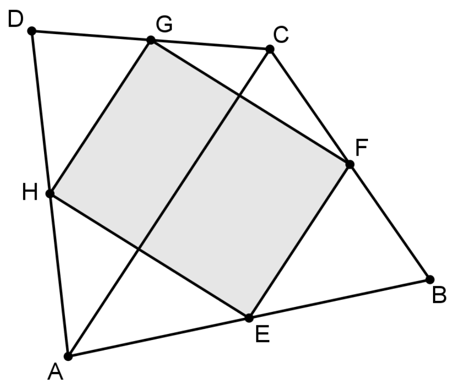
11. Se $AB = \dfrac{AD}{3}$, então $[ABE] = \dfrac{[ADE]}{3} = \dfrac{18}{3} = 6cm^2$. Temos também que F é ponto médio de BE, ou seja, $[AFE] = \dfrac{[ABE]}{2} = \dfrac{6}{2} = 3cm^2$.

12. Temos, inicialmente, que $[ABC] = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24cm^2$. Se D e F são pontos médios dos lados AB e BC, $DF = \dfrac{AC}{2}$ (base média). De forma análoga, temos que $FE = \dfrac{AB}{2}$ e $DE = \dfrac{BC}{2}$. Sendo assim, os triângulos DFE e ABC são semelhantes, com razão de semelhança igual a 2. Portanto, $[DEF] = \dfrac{[ABC]}{2^2} = \dfrac{24}{4} = 6cm^2$.

13. Se $AB = 2CD$, então $[ABD] = 2[BCD]$, segue que $[BCD] = \dfrac{T}{3}$. Além disso, os triângulos ABE e CDE são semelhantes, caso AA, sendo a razão dessa semelhança igual a 2, pois $AB = 2CD$, e, como consequência, $BE = 2DE$. Temos, portanto, $[BCE] = 2[CDE]$, segue que $[BCE] = \dfrac{2}{3}[BCD] = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{T}{3} = \dfrac{2}{9}T$.



14. Como E e F são pontos médios dos lados BC e AC do triângulo ABC, então os triângulos ABC e EBF são semelhantes de razão 2. Isso implica que a área do triângulo EBF é a quarta parte da área do triângulo ABC. De forma análoga, temos que a área do triângulo DGH é a quarta parte da área do triângulo DCA, ou seja, $[EBF] + [DGH] = \dfrac{[ABCD]}{4} = 5cm^2$. Da mesma forma, temos que $[CFG] + [AEH] = 5cm^2$. Por fim, temos que $[EFGH] = [ABCD] - ([EBF] + [DGH] + [CFG] + [AEH]) = 20 - 10 = 10cm^2$.



15. A área cinza é composta por três triângulos, cuja soma das medidas das bases é igual à medida da base do retângulo. A área branca é composta por dois triângulos, cuja soma das medidas das bases é igual à medida da base do retângulo. Como as alturas de todos os triângulos possuem a mesma medida, as áreas cinza e branca são iguais, ou seja, a área cinza é $25cm^2$.

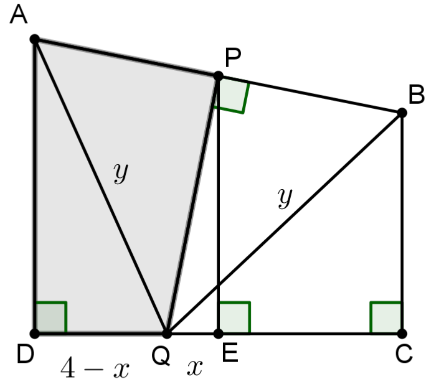
16. (Extraído do ENEM - 2016) Como as áreas devem ser iguais, temos:

$$\begin{aligned}
x(x+7) &= \frac{15\cdot 15}{2}+\frac{3\cdot 21}{2}\\
x(x+7) &= \frac{225+63}{2}\\
x(x+7) &= 144\\
x^2+7x-144 &= 0\\
x_1 &= 9\\
x_2 &= -16.
\end{aligned}$$

Portanto, $x = 9m$ e $x + 7 = 16$. Resposta B.

17. (Extraído da Vídeo Aula) Vamos traçar uma reta paralela a AD por P e marcar sua interseção E com CD. Seja $EQ = x$ e, consequentemente, $DQ = 4 - x$. Se P é ponto médio de AB, então os triângulos APQ e BPQ são congruentes e, portanto, $AQ = BQ = y$. Pelo triângulo BCQ, temos $y^2 = 7^2 + (4 + x)^2$ (I); pelo triângulo ADQ, temos $y^2 = 9^2 + (4 - x)^2$ (I). Por I e II, chegamos a $x = 2$. Por fim, concluímos que:

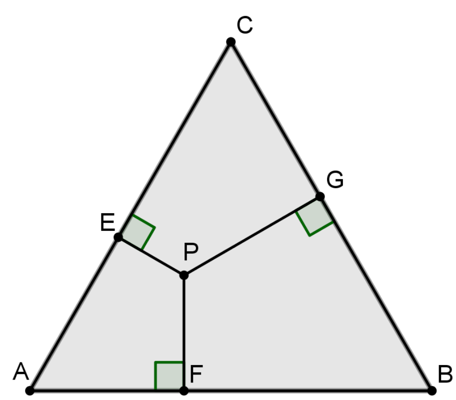
$$\begin{aligned}
[APQD] &= [APED]-[PEQ]\\
&= \frac{(8+9)\cdot 4}{2}-\frac{2\cdot 8}{2}\\
&= 34-8\\
&= 26.
\end{aligned}$$



18. (Extraído da Vídeo Aula) Vamos marcar os pontos E, F e G, interseção das perpendiculares por P aos lados AC, AB e BC, respectivamente. Agora, vamos calcular a área do triângulo ABC de duas maneiras diferentes:

$$\begin{aligned}
[ABC] &= [APB]+[APC]+[BPC]\\
\frac{l^2\sqrt{3}}{4} &= \frac{AB\cdot PF}{2}+\frac{AC\cdot PE}{2}+\frac{BC\cdot PG}{2}\\
\frac{l^2\sqrt{3}}{4} &= \frac{l\cdot PF}{2}+\frac{l\cdot PE}{2}+\frac{l\cdot PG}{2}\\
\frac{l^2\sqrt{3}}{4} &= \frac{l(PF+PE+PG)}{2}\\
\frac{l\sqrt{3}}{2} &= PF+PE+PG.
\end{aligned}$$

Portanto, a soma das distâncias de um ponto P interno a um triângulo de lado medindo l, é constante e igual a sua altura.



Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com