Números Complexos - Forma Algébrica

Forma algébrica dos números complexos

Material elaborado por Letícia Mattos.

Números Complexos - Forma Algébrica
Forma algébrica dos números complexos

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Escreva as expressões abaixo na forma $a + bi$:

(a) $\sqrt{2} - i - i(1 - \sqrt{2})$.

(b) $(2 - 3i)(-2 + i)$.

(c) $(4 - i) + i - (6 + 3i)i$.

(d) $(7 + 4i)(2 - 3i) + (6 - i)(2 + 5i)$.

Exercício 2. Encontre as raízes complexas das seguintes equações:

(a) $x^2 + 9 = 0$.

(b) $x^2 + 2x + 6 = 0$.

(c) $\dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3}$.

(d) $\dfrac{x^2}{6} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{3}$.

Exercício 3. Resolva os sistemas de equações abaixo, onde z e w são números complexos:

(a) $\begin{cases} z + wi = i \\ iz + w = 2i - 1. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} z + w = 1 \\ iz + (1+i)w = 1. \end{cases}$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Determine a real para que $(a + i)(1 - ai)$ seja real.

Exercício 5. Um imaginário puro é um número complexo cuja parte real é nula. Determine a real para que $(2 + ai)(1 + i)$ seja um imaginário puro.

Exercício 6. Encontre os números reais a e b para os quais a seguinte equação é satisfeita:

$$i(a + bi) + 2(a - bi) + 1 - i = 0.$$

Exercício 7. Determine os números complexos z que satisfaz a equação $z^2 = 1 + i$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 8. Seja $P(x) = Ax^2 + Bx + C$ um polinômio com coeficientes reais, com $a \neq 0$. Prove que se $P(a + bi) = 0$, então $P(a - bi) = 0$.

Exercício 9. Seja P um polinômio de grau 2, com coeficientes reais, tal que $P(1 - i) = 2$. Determine $P(1 + i)$.

Exercício 10. Sejam x e y números complexos que satisfazem as equações

$$x^2 + x + 1 = y \qquad \text{e} \qquad y^2 + y + 1 = x.$$

Encontre o maior valor possível para xy.

Respostas e Soluções.

1. Para resolver cada um dos itens deste exercício, utilizamos algumas propriedades fundamentais de soma e produto dos números complexos. São elas:

(1) Comutatividade: se $z, w \in \mathbb{C}$, então

$$z + w = w + z \qquad \text{e} \qquad zw = wz.$$

(2) Distributividade: se $v, w, z \in \mathbb{C}$, então

$$z(v + w) = zv + zw.$$

(3) Associatividade: se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, então

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Utilizando essas propriedades, podemos ver que as respostas são dadas por

(a) $\sqrt{2} - i - i(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} + i(\sqrt{2} - 2)$.

(b) $$\begin{aligned}(2 - 3i)(-2 + i) &= -4 + 2i + 6i - 3i^2 \\ &= -4 + 8i + 3 \\ &= -1 + 8i.\end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned}(4 - i) + i - (6 + 3i)i &= -2 + 3i^2 \\ &= -2 - 3 \\ &= -5.\end{aligned}$$

(d) Por um lado, veja que

$$\begin{aligned}(7 + 4i)(2 - 3i) &= 14 - 21i + 8i - 12i^2 \\ &= 14 + 12 - 13i \\ &= 28 - 13i.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}(6 - i)(2 + 5i) &= 12 + 30i - 2i - 5i^2 \\ &= 12 + 5 + 28i \\ &= 17 + 28i.\end{aligned}$$

Juntando o que obtemos nas duas expressões acima, segue que

$$\begin{aligned}(7 + 4i)(2 - 3i) + (6 - i)(2 + 5i) &= 28 - 13i + 17 + 28i \\ &= 45 + 15i.\end{aligned}$$

2.

(a) Primeiro, veja que

$$\begin{aligned}x^2 + 9 = 0 &\iff x^2 = -9 \\ &\iff x^2 = (3i)^2\end{aligned}$$

Agora, note que a expressão $x^2 - (3i)^2$ pode ser escrita como $(x + 3i) \cdot (x - 3i)$. Disso, segue que

$$\begin{aligned}x^2 = (3i)^2 &\iff x^2 - (3i)^2 = 0 \\ &\iff (x + 3i) \cdot (x - 3i) = 0.\end{aligned}$$

Concluímos que as raízes são $3i$ e $-3i$.

(b) Completando quadrados, temos que

$$x^2 + 2x + 6 = (x + 1)^2 + 5.$$

Assim,

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 6 = 0 &\iff (x + 1)^2 = -5 \\ &\iff (x + 1)^2 = (i\sqrt{5})^2\end{aligned}$$

Utilizando o produto notável da diferença de dois quadrados, segue que

$$(x + 1)^2 = (i\sqrt{5})^2 \iff (x + 1 + i\sqrt{5})(x + 1 - i\sqrt{5}) = 0$$

Logo, concluímos que as raízes são $-1 - i\sqrt{5}$ e $-1 + i\sqrt{5}$.

(c) Primeiro, vamos transformar nossa equação em uma equação do segundo grau:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{3} = 0 &\iff \frac{3x - 3(x + 3) - x(x + 3)}{3x(x + 3)} = 0 \\ &\iff 3x - 3x - 9 - x^2 - 3x = 0 \\ &\iff x^2 + 3x + 9 = 0.\end{aligned}$$

Completando quadrados, temos que

$$x^2 + 3x + 9 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}x^2 + 3x + 9 = 0 &\iff \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(i\sqrt{\frac{27}{4}}\right)^2,\end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\left(x + \frac{3}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

Portanto, as raízes são $-\frac{3+3i\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{-3+3i\sqrt{3}}{2}$.

(d) Primeiro, veja que

$$\frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} + \frac{2}{3} = 0 \iff x^2 - 3x + 4 = 0.$$

Completando quadrados, temos que

$$x^2 - 3x + 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}x^2 - 3x + 4 = 0 &\iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(i\sqrt{\frac{7}{4}}\right)^2,\end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\left(x - \frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}\right) = 0.$$

Portanto, as raízes são $\frac{3-i\sqrt{7}}{2}$ e $\frac{3+i\sqrt{7}}{2}$.

3.

(a) Multiplicando ambos os lados da primeira equação por $-i$, temos

$$\begin{cases} -iz + w = 1 \\ iz + w = 2i - 1. \end{cases}$$

Somando as duas equações acima, ficamos com $2w = 2i \iff w = i$. E, uma vez que $z + wi = i$, segue que $z = i + 1$.

(b) Multiplicando ambos os lados da primeira equação por i, temos

$$\begin{cases} iz + iw = i \\ iz + (1+i)w = 1. \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos $w = 1 - i$. E, uma vez que $z + w = 1$, segue que $z = i$.

4. Primeiro, observe que

$$\begin{aligned}(a+i)(1-ai) &= a - a^2 i + i - ai^2 \\ &= 2a + (1-a^2)i.\end{aligned}$$

Logo, para que $(a+i)(1-ai) \in \mathbb{R}$, devemos ter $1 - a^2 = 0$. Concluímos que os valores de a para os quais essa expressão nos dá um número real são -1 e $+1$.

5. Primeiro, observe que

$$\begin{aligned}(2+ai)(1+i) &= 2 + 2i + ai + ai^2 \\ &= 2 - a + (2+a)i.\end{aligned}$$

Logo, para que $(2+ai)(1+i)$ seja um imaginário puro, devemos ter $2 - a = 0 \iff a = 2$.

6. Observe que

$$\begin{aligned}i(a+bi) + 2(a-bi) + 1 - i &= ai + bi^2 + 2a - 2bi + 1 - i \\ &= (1 + 2a - b) + (a - 2b - 1)i\end{aligned}$$

Para que essa última expressão seja igual a 0, devemos ter

$$\begin{cases} 1 + 2a - b = 0 \\ a - 2b - 1 = 0. \end{cases}$$

Agora, nos resta resolver esse sistema linear para encontrar os valores de a e b. Multiplicando a primeira equação por -2, ficamos com

$$\begin{cases} -2 - 4a + 2b = 0 \\ a - 2b - 1 = 0. \end{cases}$$

Somando as duas últimas equações, obtemos $-3a - 3 = 0 \iff a = -1$. Substituindo o valor de a na última equação, segue que $b = -1$.

7. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $z = a + bi$. Utilizando essa notação, temos que $z^2 = a^2 + 2abi - b^2$. Assim, segue que a equação $z^2 = 1 + i$ é equivalente a

$$a^2 + 2abi - b^2 = 1 + i \iff (a^2 - b^2 - 1) + (2ab - 1)i = 0.$$

Para que essa última expressão seja igual a 0, devemos ter

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 1. \end{cases}$$

Agora, nos resta resolver esse sistema para encontrar os valores de a e b. Elevando ao quadrado ambos os lados da última equação, temos

$$\begin{cases} a^2 = 1 + b^2 \\ 4a^2b^2 = 1. \end{cases}$$

Substituindo o valor de a^2 da primeira equação na segunda, obtemos $4b^2(1 + b^2) = 1$, que é equivalente a $4b^4 + 4b^2 - 1 = 0$. Ora, isso é nada mais que uma equação de segundo grau na variável b^2. Aplicando a fórmula de Bhaskara, temos $b^2 = (-1 \pm \sqrt{2})/2$. Mas, como $b \in \mathbb{R}$, devemos ter

$$b^2 = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Da igualdade $a^2 = 1 + b^2$, também inferimos que

$$a^2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Como $2ab = 1$, segue que os números complexos $a + bi$ que satisfazem a equação iniciais são

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$$

e

$$-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}.$$

8. Vamos expressar $P(a - bi)$ e $P(a + bi)$ em termos de A, B, C, a e b. Primeiro, veja que

$$\begin{aligned}P(a+bi) &= A(a+bi)^2 + B(a+bi) + C \\ &= A(a^2 + 2abi - b^2) + B(a+bi) + C \\ &= \big(a^2A - b^2A + aB + C\big) + \big(2abA + bB\big)i.\end{aligned}$$

Em particular, como $P(a + bi) = 0$, devemos ter

$$\begin{cases} a^2A - b^2A + aB + C = 0 \\ 2abA + bB = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Agora, veja que

$$\begin{aligned}P(a-bi) &= A(a-bi)^2 + B(a-bi) + C \\ &= A(a^2 - 2abi - b^2) + B(a-bi) + C \\ &= \big(a^2A - b^2A + aB + C\big) - \big(2abA + bB\big)i.\end{aligned}$$

Por (**??**), segue que $P(a - bi) = 0$.

9. Seja $Q(x) := P(x) - 2$. Note que $1 - i$ é raiz do polinômio Q. Pelo exercício anterior, isso implica que $1 + i$ também é raiz desse polinômio. Assim, $Q(1+i) = 0$, e então $P(1+i) = 2$.

10. Subtraindo as duas equações, temos

$$(y^2 - x^2) + (y - x) = -(y - x).$$

Primeiro, vamos supor $y - x \neq 0$ para que possamos dividir ambos os lados da equação por $y - x$. Neste caso, obtemos

$$x + y = -2.$$

Substituindo o valor de y obtido acima na equação $x^2 + x + 1 = y$, ficamos com

$$x^2 + 2x + 3 = 0.$$

Resolvendo essa equação de segundo grau através da fórmula de Bhaskara, obtemos $x = -1 \pm i\sqrt{2}$. E, como $x + y = -2$, temos $y = -1 \mp i\sqrt{2}$. Em todo caso, o produto é igual a

$$\begin{aligned}(-1 - i\sqrt{2})(-1 + i\sqrt{2}) &= 1 - 2i^2 \\ &= 3.\end{aligned}$$

Lembre-se que chegamos a esse resultado supondo que $x \neq y$. Agora, se $x = y$, teríamos, pelas equações dadas, que $x^2 + 1 = 0$.

Portanto, concluímos que o maior valor possível para xy é 3.

Material elaborado por Letícia Mattos.