Módulo Áreas de Figuras Planas

Exercícios da OBMEP

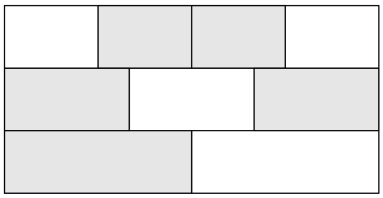
9° ano E.F.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Áreas de Figuras Planas
Exercícios da OBMEP

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. A figura representa um retângulo de área $36m^2$, dividido em três faixas de mesma largura. Cada uma das faixas está dividida em partes iguais: uma em quatro partes, outra em três e a terceira em duas. Qual é a área total das partes sombreadas?



a) $18m^2$.

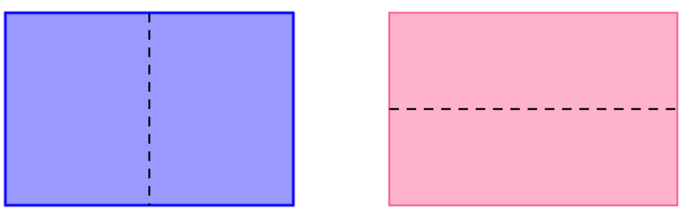
b) $20m^2$.

c) $22m^2$.

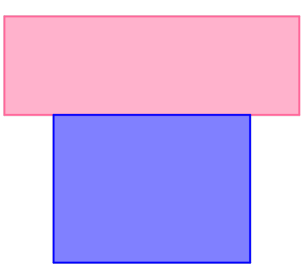
d) $24m^2$.

e) $26m^2$.

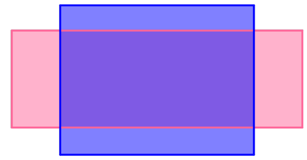
Exercício 2. Lucinha tem duas folhas retangulares, uma azul e outra rosa, ambas com $8cm$ de largura e $12cm$ de comprimento. Ela cortou as duas folhas ao meio, conforme indicado na figura.


folha azul   folha rosa

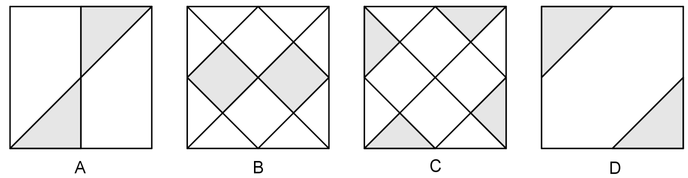
a) Lucinha pegou uma metade de cada folha e fez coincidir os lados maiores desses pedaços, formando a figura abaixo, parecida com a letra T. Qual é o perímetro dessa figura?



b) Em seguida, ela deslizou um pedaço sobre o outro, sem girar, formando a figura abaixo. Qual é a área do retângulo formado pela sobreposição das duas folhas?



Exercício 3. Os pontos destacados nos quadrados abaixo são pontos médios dos lados.



Quantos desses quadrados têm área sombreada igual a $\frac{1}{4}$ de sua área?

a) 0.

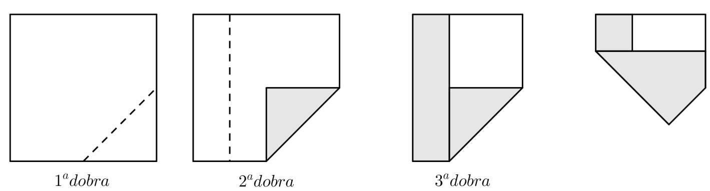
b) 1.

c) 2.

d) 3.

e) 4.

Exercício 4. Alice fez três dobras numa folha de papel quadrada de lado $20cm$, branca na frente e cinza no verso. Na primeira dobra, ela fez vértice coincidir com o centro do quadrado e depois fez mais duas dobras, como indicado na figura. Após a terceira dobra, qual é a área da parte cinza da folha que ficou visível?



a) $70,5cm^2$.

b) $100,5cm^2$.

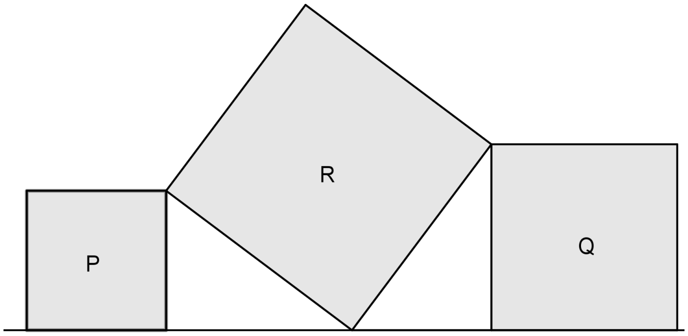
c) $112,5cm^2$.

d) $162,5cm^2$.

e) $225,5cm^2$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Na figura, as áreas dos quadrados P e R são iguais a $24cm^2$ e $168cm^2$, respectivamente. Qual é a área do quadrado Q?



a) $96cm^2$.

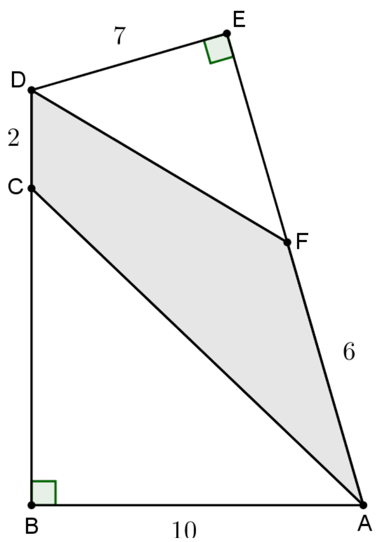
b) $100cm^2$.

c) $121cm^2$.

d) $144cm^2$.

e) $156cm^2$.

Exercício 6. Na figura, os pontos C e F pertencem aos lados BD e AE do quadrilátero $ABDE$, respectivamente. Os ângulos B e E são retos e os segmentos AB, CD, DE e FA têm suas medidas indicadas na figura. Qual é a área do quadrilátero $ACDF$?



a) 16.

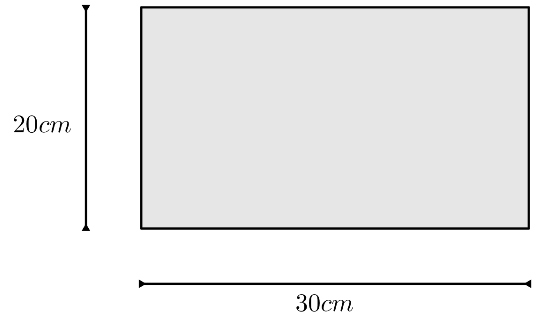
b) 21.

c) 31.

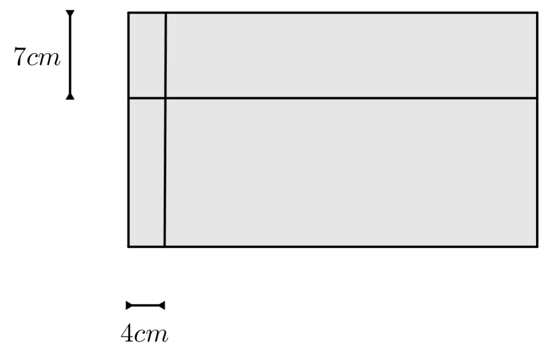
d) 33.

e) 40.

Exercício 7. Lucinha tem duas folhas retangulares iguais, cujos lados medem $20cm$ e $30cm$.

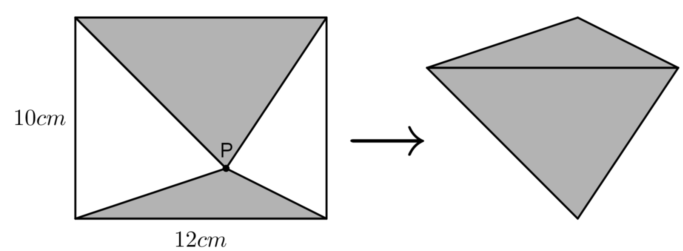


a) Lucinha fez dois traços retos na primeira folha, um a $4cm$ da margem esquerda e outro a $7cm$ da margem superior, dividindo-a em quatro retângulos. Um desses retângulos têm a maior área. Qual é o valor dessa área?



b) Ajude Lucinha a dividir a segunda folha em quadrados iguais, desenhando traços paralelos às margens, de modo que esses quadrados tenham a maior área possível.

Exercício 8. Juliana desenhou, em uma folha de papel, um retângulo de comprimento de $12cm$ e largura $10cm$. Ela escolheu um ponto P no interior do retângulo e recortou os triângulos sombreados como na figura. Com esses triângulos ela montou o quadrilátero da direita. Qual é a área do quadrilátero?



a) $58cm^2$.

b) $60cm^2$.

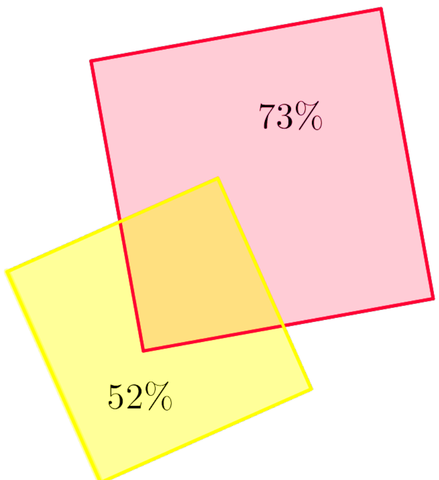
c) $64cm^2$.

d) $66cm^2$.

e) $70cm^2$.

Exercício 9. Uma piscina com fundo e paredes retangulares está totalmente revestida com azulejos quadrados iguais, todos inteiros. O fundo da piscina tem 231 azulejos e as quatro paredes têm um total de 1024 azulejos. Qual é, em número de azulejos, a profundidade da piscina?

Exercício 10. Dois quadrados de papel se sobrepõem como na figura. A região não sobreposta do quadrado menor corresponde a 52% de sua área e a região não sobreposta do quadrado maior corresponde a 73% de sua área. Qual é a razão entre o lado do quadrado menor e o lado do quadrado maior?



a) $\frac{3}{4}$.

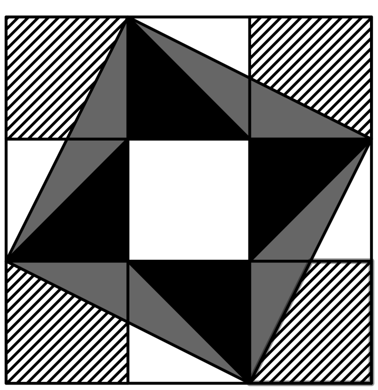
b) $\frac{5}{8}$.

c) $\frac{2}{3}$.

d) $\frac{4}{7}$.

e) $\frac{4}{9}$.

Exercício 11. A figura foi desenhada sobre um quadriculado formado por nove quadradinhos, cada um com área igual a $4cm^2$.



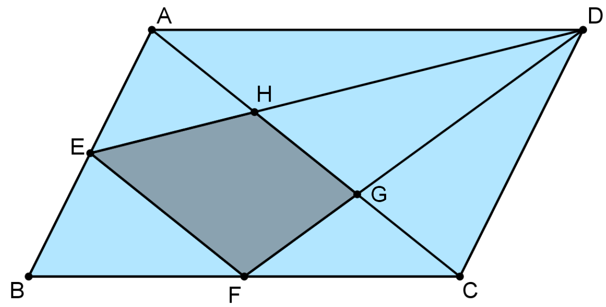
a) Qual é a área total pintada de preto?

b) Qual é a área total listrada?

c) Qual é a área total pintada de cinza?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 12. O paralelogramo $ABCD$ tem área $24cm^2$ e os pontos E e F são os pontos médios dos lados AB e BC, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero $EFGH$?



a) $4cm^2$.

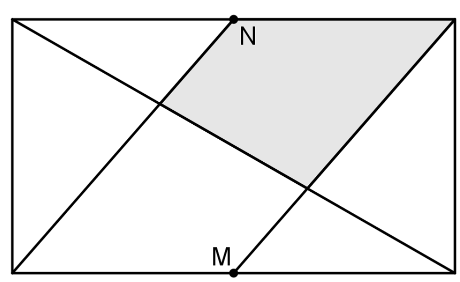
b) $5cm^2$.

c) $6cm^2$.

d) $7cm^2$.

e) $8cm^2$.

Exercício 13. A figura representa um retângulo de $120m^2$ de área. Os pontos M e N são os pontos médios dos lados a que pertencem. Qual é a área da região sombreada?



a) $20m^2$.

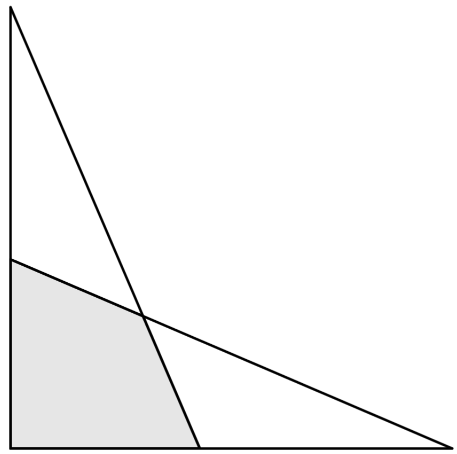
b) $24m^2$.

c) $30m^2$.

d) $36m^2$.

e) $40m^2$.

Exercício 14. Dois triângulos retângulos, ambos com catetos de medidas a e b, com $a > b$, são sobrepostos como na figura. Qual é a área do quadrilátero sombreado?



a) $\dfrac{a(a^2+b^2)}{a+b}$.

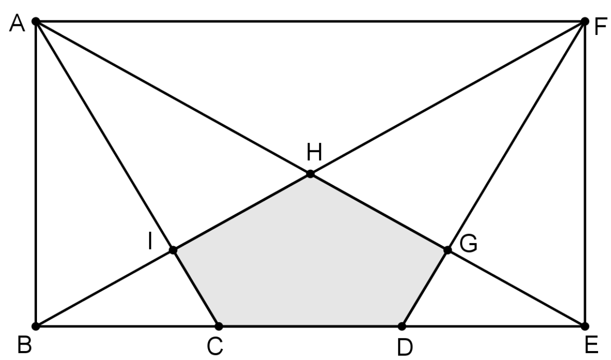
b) $\dfrac{b(a^2+b^2)}{a+b}$.

c) $\dfrac{b^2(a-b)}{a+b}$.

d) $\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2}$.

e) $\dfrac{ab^2}{a+b}$.

Exercício 15. Na figura, $ABEF$ é um retângulo e $BC = CD = DE$. Qual é a razão entre as áreas do pentágono $CDGHI$ e do retângulo $ABEF$?



a) $\dfrac{2}{15}$.

b) $\dfrac{1}{6}$.

c) $\dfrac{1}{8}$.

d) $\dfrac{3}{10}$.

e) $\dfrac{1}{12}$.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

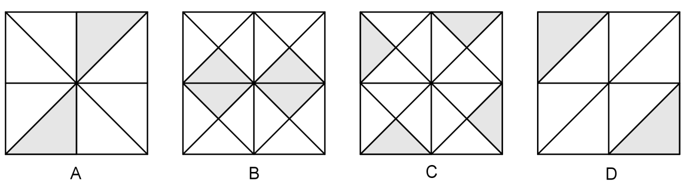
1. (Extraído da OBMEP - 2013) Cada faixa tem $\dfrac{36}{3} = 12m^2$. Sendo assim, a primeira faixa tem $\dfrac{1}{2} \cdot 12 = 6m^2$ de área sombreada; a segunda tem $\dfrac{2}{3} \cdot 12 = 8m^2$; e a terceira tem $\dfrac{1}{2} \cdot 12 = 6m^2$. Portanto, a área sombreada tem $6 + 8 + 6 = 20m^2$. Resposta B.

2. (Extraído da OBMEP - 2014)

a) O perímetro do pedaço rosa é $24 + 8 = 32cm$ e do pedaço azul é $16 + 12 = 28cm$. Como um dos lados do retângulo azul coincide com um lado do retângulo rosa, então o perímetro da figura é $32 + 28 - 8 = 52cm$.

b) O retângulo da interseção tem comprimento igual ao comprimento do retângulo azul e largura igual à largura do retângulo rosa. Assim, sua área é $8 \cdot 4 = 32cm^2$.

3. (Extraído da OBMEP - 2015) Vamos dividir a as figuras em polígonos de mesma área.



Contando os quadrados sombreados, temos:

A) $\dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$.

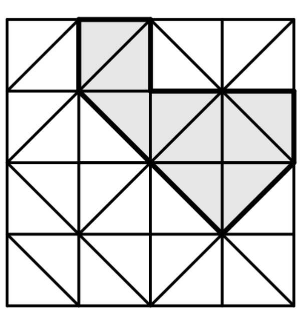
B) $\dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$.

C) $\dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$.

D) $\dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$.

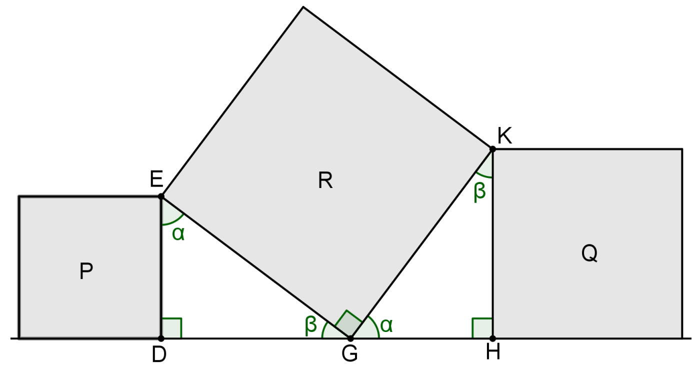
Portanto, todos os quadrados têm área sombreada igual a $\dfrac{1}{4}$ de sua área. Resposta E.

4. (Extraído da OBMEP - 2016) Vamos dividir a folha original em pequenos triângulos retângulos isósceles, todos congruentes, e, sobrepondo a figura final sobre a original, temos:



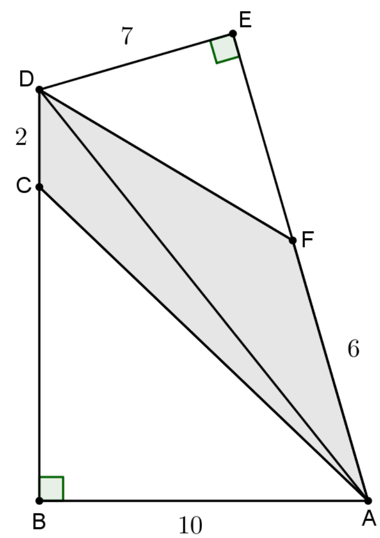
Vemos que a área cinza é $\dfrac{9}{32}$ da área original, ou seja, igual a $\dfrac{9}{32} = \cdot 400 = 112,5cm^2$. Resposta C.

5. (Extraído da OBMEP - 2016) Vamos analisar os triângulos da figura:



Vemos que os triângulos EDG e GHK são congruentes (caso ALA). Como as áreas de P e R são $24cm^2$ e $168cm^2$, respectivamente, então $DE^2 = GH^2 = 24$ e $GE^2 = GK^2 = 168$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo GHK, temos $GK^2 = GH^2 + HK^2$, segue que $HK^2 = 168 - 24 = 144$. Portanto, a área do quadrado Q é $144cm^2$. Resposta D.

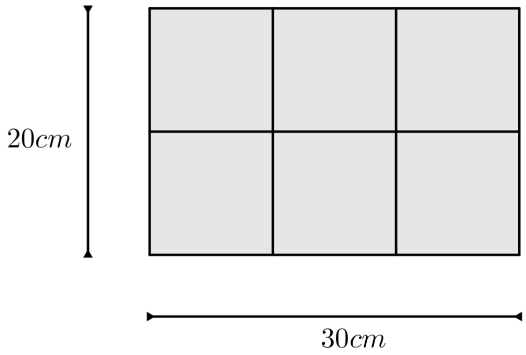
6. (Extraído da OBMEP - 2016) Traçando a diagonal AD, dividimos o quadrilátero $ACDF$ em dois triângulos, ADC, de base 2 e altura 10, e ADF, de base 6 e altura 7. Assim, a área do quadrilátero é $\dfrac{2 \cdot 10}{2} + \dfrac{6 \cdot 7}{2} = 10 + 21 = 31$. Resposta C.



7. (Extraído da OBMEP - 2015)

a) $(30 - 4)(20 - 7) = 26 \cdot 13 = 338cm^2$.

b) Como os quadrados devem ter a mesma medida do lado e devem ter também a maior área possível, devemos encontrar o MDC entre as medidas dos lados, ou seja, $MDC(20, 30) = 10$. Portanto, os lados dos quadrados devem medir $10cm$.



8. (Extraído da OBMEP - 2013) O quadrilátero é a composição de dois triângulos. Os triângulos têm base medindo $12cm$ e vamos supor que suas alturas meçam x e y, sendo $x + y = 10cm$. A área do quadrilátero será $\dfrac{12 \cdot x}{2} + \dfrac{12 \cdot y}{2} = 6x + 6y = 6(x+y) = 6 \cdot 10 = 60cm^2$. Resposta B.

9. (Extraído da OBMEP - 2013) Temos $231 = 3 \cdot 7\ 11$ e $1024 = 2^{10}$. Assim, a altura da piscina, em quantidade de azulejos é uma potência de 2, assim como o perímetro do fundo da piscina. Dessa forma, a única possibilidade para as dimensões do fundo da piscina é 21 por 11 azulejos e, consequentemente, a profundidade tem $\dfrac{1024}{11+21+11+21} = \dfrac{2^{10}}{2^6} = 2^4 = 16$ azulejos

10. (Extraído da OBMEP - 2013) A área sobreposta corresponde a 27% da área do primeiro e 48% da área do segundo. Como esta área é a mesma e chamando as medidas do quadrado maior de L e do quadrado menor de ℓ, temos:

$$\begin{aligned} 27\%L^2 &= 48\%\ell \\ \frac{27L^2}{100} &= \frac{48\ell^2}{100} \\ 27L^2 &= 48\ell^2 \\ 9L^2 &= 16\ell^2 \\ 3L &= 4\ell \\ \frac{\ell}{L} &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

11. (Extraído da OBMEP - 2016)

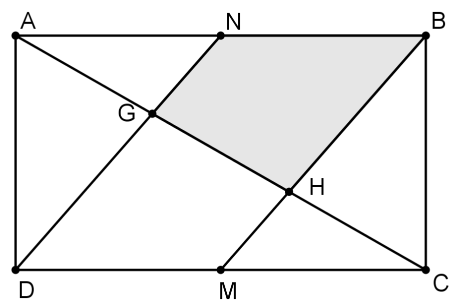
a) Como cada retângulo pintado de preto tem a metade da área de cada quadradinho, a área pintada de preto é $4 \cdot 2 = 8cm^2$.

b) Cada parte listrada juntamente com cada parte pequena branca formam uma área de um quadradinho, ou seja, $4cm^2$. Além disso, as quatro partes pequenas brancas formam, juntas um quadradinho de $4cm^2$ de área. Assim, a área listrada é $4 \cdot 4 - 4 = 12cm^2$.

c) A área cinza é a área total, menos a parte preta, menos a parte branca e menos a parte listrada, ou seja, $4 \cdot 9 - 8 - 8 - 12 = 8cm^2$.

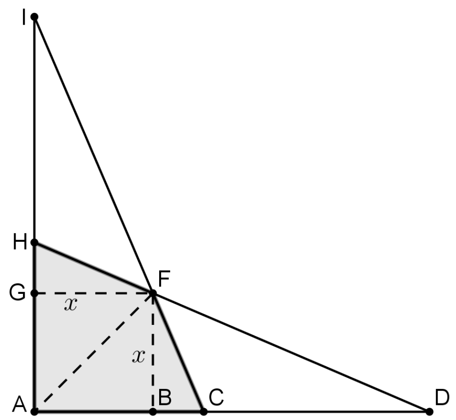
12. (Extraído da OBMEP - 2016) Os triângulos ADG e CFG são semelhantes (caso AA) de razão 2, pois $AD = 2CF$, então $DG = 2GF$. Os triângulos ADC e ABC têm, cada um, a metade da área do paralelogramo $ABCD$, ou seja, $12cm^2$. A área do triângulo EBF é a quarta parte da área do triângulo ABC, ou seja, $3cm^2$, pois EF é base média deste. A área do triângulo FGC é a terça parte do triângulo DCF, ou seja, $2cm^2$, pois $DG = 2GF$. O mesmo ocorre com o triângulo AEH. Temos, portanto, que a área $EFGH$ é $12 - 3 - 2 - 2 = 5cm^2$. Resposta B.

13. (Extraído da OBMEP - 2013) Vamos inicialmente nomear os pontos da figura:



Como os triângulos ABH e CMH são semelhantes (caso AA) de razão 2, pois $AB = 2CM$, então $AH = 2HC$ e, consequentemente, a área do triângulo ABH é o dobro da área do triângulo BCH. Além disso, BM e DN são paralelos e, como N é ponto médio, NG é base média do triângulo ABH. Sendo assim, a área do triângulo ANG é a quarta parte da área do triângulo ABH. Temos, portanto, que a área sombreada é $\dfrac{3}{4}$ da área do triângulo ABH, ou seja, $\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 120 = 30m^2$. Resposta C.

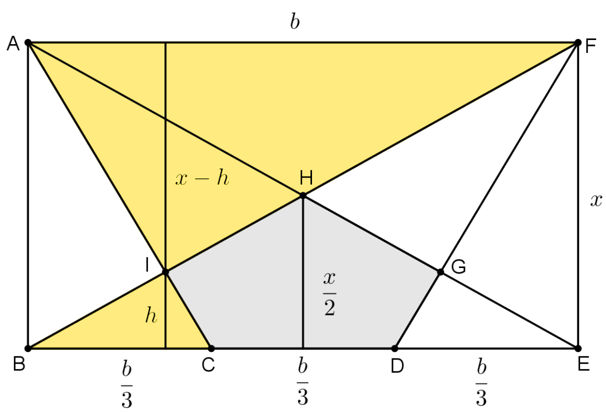
14. (Extraído da OBMEP - 2016) Na figura, os segmentos auxiliares FG e FB são perpendiculares a AH e a AC, respectivamente. Usando a simetria da figura, se $FG = FB = x$, então $ABFG$ é um quadrado de lado x, logo, $FG = FB = AB = AG = x$. Além disso, dos dados do problema temos que $AC = AH = b$ e $AI = AD = a$. Por outro lado, os triângulos BDF e ADH são semelhantes; logo, vale a relação $\dfrac{a-x}{a} = \dfrac{x}{b}$. Concluímos que $x = \dfrac{ab}{a+b}$. Finalmente, a área do quadrilátero $ACFH$ (ele pode ser decomposto nos triângulos AFH e AFC) é dada por $2 \cdot \dfrac{bx}{2} = bx = \dfrac{ab^2}{a+b}$. Resposta E.



15. (Extraído da OBMEP - 2016) Sejam x o lado menor do retângulo $ABEF$, b o lado maior de $ABEF$ e h a altura do triângulo BCI com relação ao lado BC. A área do triângulo BHE é $\dfrac{1}{4}$ da área do retângulo $ABEF$, ou seja, é igual a $b \cdot \dfrac{x}{4}$. Como os triângulos BIC e FIA são semelhantes, temos:

$$\begin{aligned} \frac{h}{x-h} &= \frac{\frac{b}{3}}{b} \\ 3h &= x-h \\ h &= \frac{x}{4}. \end{aligned}$$

E também $[BIC] = [GDE] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{b}{3} \cdot \dfrac{x}{4} = \dfrac{bx}{24} = \dfrac{[ABEF]}{24}$, onde $[ABEF]$ representa a área do polígono $ABEF$, por exemplo. Portanto, $[CDGHI] = \dfrac{[ABEF]}{4} - \dfrac{[ABEF]}{24} - \dfrac{[ABEF]}{24} = \dfrac{4[ABEF]}{24} = \dfrac{[ABEF]}{6}$. Logo, $\dfrac{[CDGHI]}{[ABEF]} = \dfrac{1}{6}$. Resposta B.



Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com