

# Módulo de Áreas de Figuras Planas

## Áreas de Figuras Planas: Resultados Básicos

**Nono Ano**

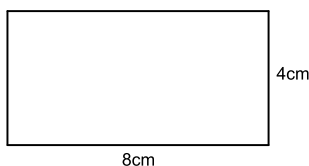


## Área de Figuras Planas: Resultados Básicos

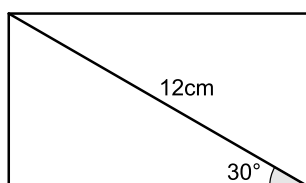
### 1 Exercícios Introdutórios

**Exercício 1.** Determine a área dos retângulos abaixo:

a)



b)



**Exercício 2.** Determine a área de um quadrado

a) cujo lado mede 8cm.

b) cujo lado mede 7,1cm.

c) cujo lado mede  $\sqrt{3}$ cm.

d) cuja diagonal mede 6cm.

**Exercício 3.** Determine a medida do lado de um quadrado cuja área é

a)  $25\text{cm}^2$ .

b)  $12\text{cm}^2$ .

**Exercício 4.** Determine a área de um losango

a) cujas diagonais medem 5cm e 8cm.

b) cujo lado mede 5cm e a diagonal menor mede 6cm.

c) cujo lado mede 8cm e um dos ângulos internos mede  $120^\circ$ .

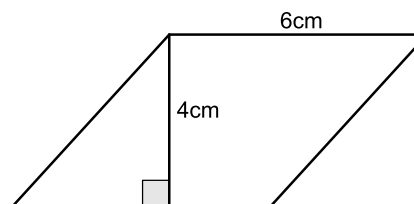
**Exercício 5.** Determine a área de um trapézio de bases medindo 5cm e 7cm e altura medindo 4cm.

**Exercício 6.** Determine a área de um quadrado cujo perímetro é 72cm.

**Exercício 7.** Determine a área de um trapézio isósceles cujas bases têm 6cm e 12cm de medida e os outros lados, 5cm.

**Exercício 8.** Calcule a área dos paralelogramos abaixo

a)

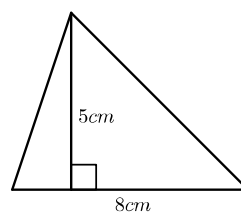


b)

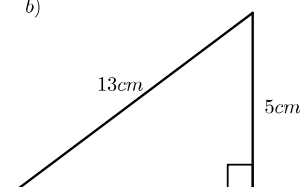


**Exercício 9.** Calcule a área dos triângulos abaixo.

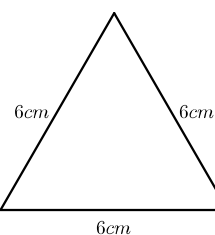
a)



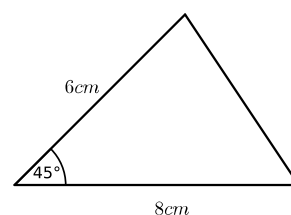
b)



c)



d)



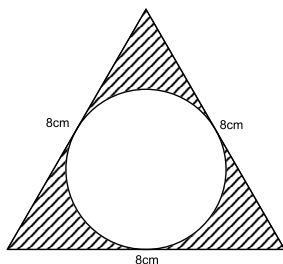
### 2 Exercícios de Fixação

**Exercício 10.** A altura de um retângulo é a metade de sua base. Se sua área é  $450\text{m}^2$ , determine suas dimensões.

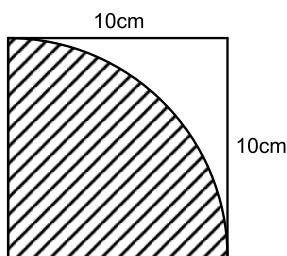
**Exercício 11.** Aumentando em 10% o comprimento de um retângulo e diminuindo em 10% sua largura, determine sua nova área, sabendo que a área inicial era  $100\text{cm}^2$ .

**Exercício 12.** Determine a área hachurada nas figuras abaixo.

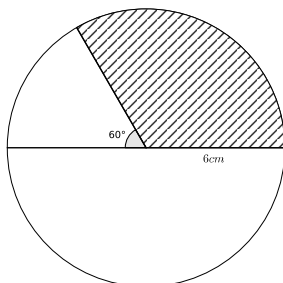
a)



b)



c)

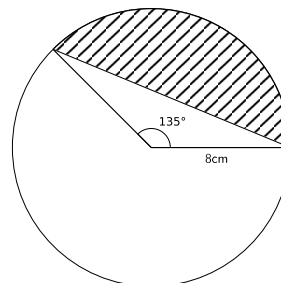


**Exercício 13.** A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento, causa uma redução de até 20% nas dimensões lineares de uma peça. (Disponível em: [www.arq.ufsc.br](http://www.arq.ufsc.br). Acesso em: 3 mar 2012). Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30cm e 15cm. Após o cozimento, esses lados foram reduzidos em 20%. Em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em

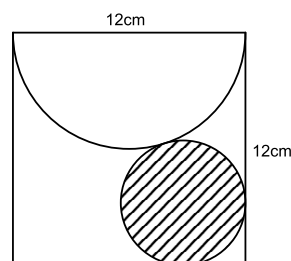
- (a) 4%      (b) 20%      (c) 36%      (d) 64%      (e) 96%.

**Exercício 14.** Determine a área hachurada nas figuras abaixo.

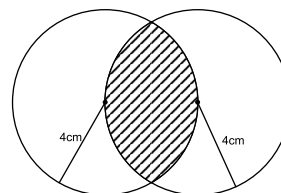
a)



b)



c)



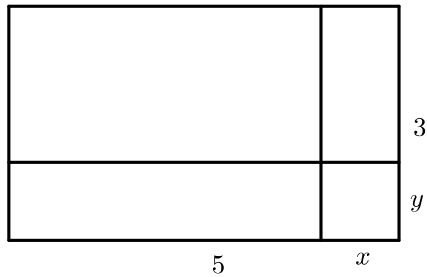
### 3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

**Exercício 15.** Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento  $x$  no comprimento e  $y$  na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é  $(5-x)(3-y)$ .

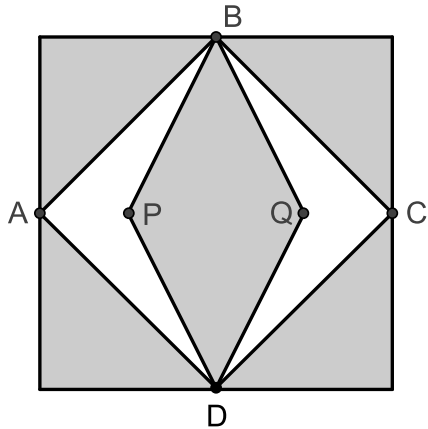
Nestas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por

- (a)  $2x$       (b)  $15 - 3x$       (c)  $15 - 5x$       (d)  $-5y - 3x$   
 (e)  $5y + 3x - xy$ .

**Exercício 16.** Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de



quadrados de lado medindo  $1m$ , conforme a figura a seguir.



Nesta figura, os pontos  $A, B, C$  e  $D$  são pontos médios dos lados do quadrado de área  $1m$  e os segmentos  $AP$  e  $QC$  medem  $1/4$ . Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa  $R\$30,00$  o  $m^2$  e outro para a parte mais clara (regiões  $ABPDA$  e  $BCDQB$ ), que custa  $R\$50,00$  o  $m^2$ . De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

- (a)  $R\$22,50$     (b)  $R\$35,00$     (c)  $R\$40,00$     (d)  $R\$42,50$     (e)  $R\$45,00$ .

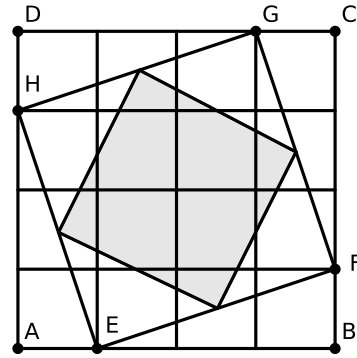
**Exercício 17.** Considere um quadrado  $ABCD$  de lado 1. Externamente ao quadrado, são formados os triângulos equiláteros  $ABE, BCF, CDG$  e  $DAH$ . Qual a área do quadrilátero  $EFGH$ ?

- a) 2    b)  $2\sqrt{3}$     c)  $2 + \sqrt{3}$     d) 3    e) 6.

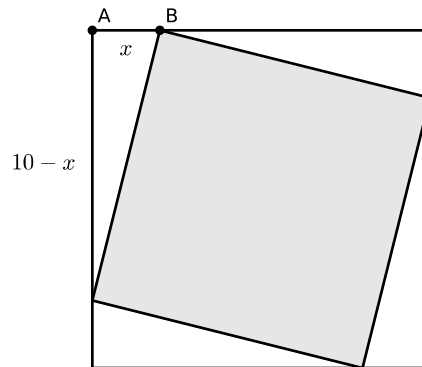
**Exercício 18.** O quadrado  $ABCD$  da figura abaixo está dividido em 16 quadradinhos iguais. O quadrado sombreado tem os vértices sobre os pontos médios do quadrado  $EFGH$ .

- a) A área do quadrado  $EFGH$  corresponde a que fração da área do quadrado  $ABCD$ ?
- b) Se o quadrado  $ABCD$  tem  $80cm^2$  de área, qual é o lado do quadrado sombreado?

**Exercício 19.** Um prefeito quer construir uma praça quadrada de  $10m$  de lado, que terá canteiros triangulares



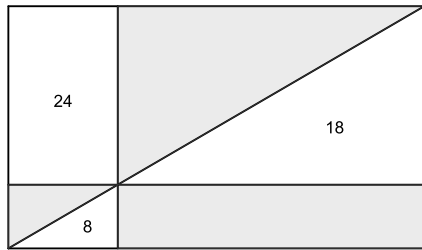
iguais de pedra e um canteiro quadrado de grama, como na figura. O prefeito ainda não decidiu qual será a área do canteiro de grama, por isso o comprimento deste segmento  $AB$  está indicado por  $x$  na figura.



- a) Calcule a área do canteiro de grama para  $x = 2$ .
- b) Escreva a expressão da área do canteiro de grama em função de  $x$ .
- c) Sabe-se que o canteiro de grama custa  $R\$4,00$  por metro quadrado e os canteiros de pedra custam  $R\$3,00$  por metro quadrado. Qual a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cinco canteiros?

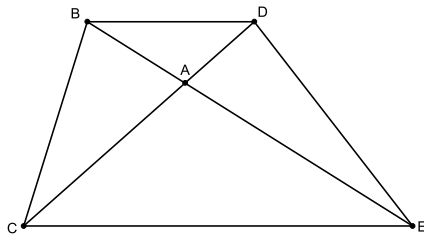
**Exercício 20.** O retângulo da figura foi repartido por meio de três segmentos em várias regiões, algumas retangulares e outras triangulares. A linha não paralela aos lados é uma diagonal e os números indicam as áreas em  $m^2$  das regiões brancas em que se encontram. Qual é a do retângulo original?

- (a)  $60cm^2$     (b)  $80cm^2$     (c)  $90cm^2$     (d)  $100cm^2$     (e) Impossível saber.

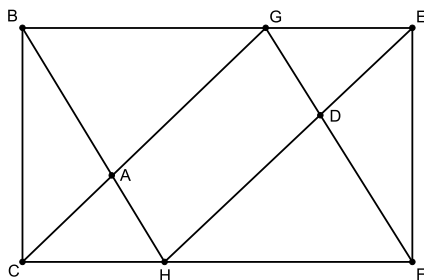


**Exercício 21.**

- a) Temos abaixo um trapézio e suas diagonais. Mostre que a área do triângulo  $ABC$  é igual à área do triângulo  $ADE$ .



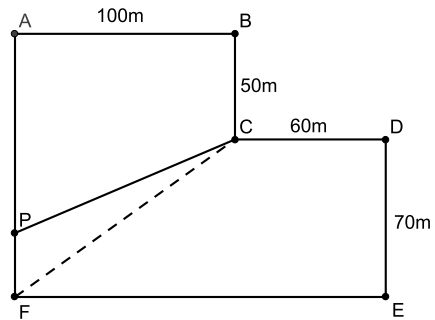
- b) Na figura a seguir,  $BCFE$  é um retângulo, o triângulo  $ABC$  tem área  $5\text{cm}^2$  e o triângulo  $DEF$  tem área  $4\text{cm}^2$ . Calcule a área do quadrilátero  $AGDH$ .



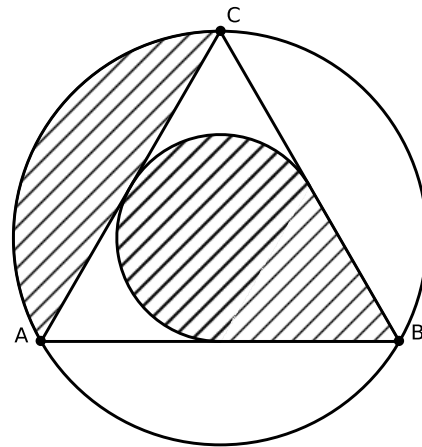
**Exercício 22.** João e Maria herdaram um terreno, representado pelo polígono  $ABCDEF$ . Havia uma cerca reta separando o terreno em duas partes, mas como as áreas eram diferentes, João e Maria resolveram deslocá-la, mantendo-a reta, de forma que a extremidade em  $F$  fosse para o ponto  $P$ . Com isso, as duas áreas tornaram-se iguais. Supondo que os ângulos em  $A, B, D, E$  e  $F$  são retos, de quantos metros foi o deslocamento  $FP$ ?

- a) 5    b) 8    c) 10    d) 12    e) 20.

**Exercício 23.** Seja  $ABCD$  um retângulo tal que  $AD = 6$  e  $DC = 8$ . Construa um triângulo equilátero  $CED$  tal que  $E, A$  e  $B$  estão no mesmo semi-plano determinado pela reta  $CD$ . Determine a área do triângulo  $AEC$ .



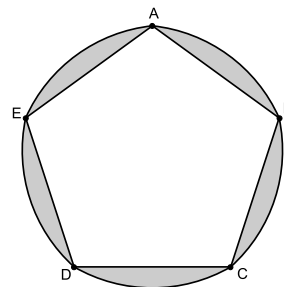
**Exercício 24.** Considere o triângulo  $ABC$  inscrito em uma circunferência em que os menores arcos  $AB, BC$  e  $AC$  são congruentes.



Se a circunferência menor, inscrita ao triângulo  $ABC$ , tem raio igual a  $1\text{cm}$ , então o número que representa a área hachurada, em  $\text{cm}^2$ , é igual ao número que representa

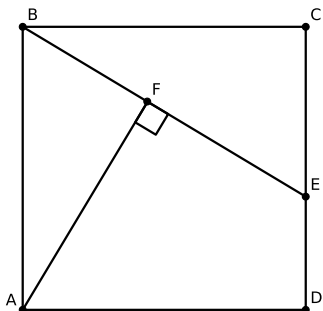
- a) o comprimento do círculo menor, em  $\text{cm}$ .  
 b) a área do círculo maior em  $\text{cm}^2$ .  
 c) o comprimento do círculo maior, em  $\text{cm}$ .  
 d) o dobro da área do triângulo  $ABC$ , em  $\text{cm}^2$ .

**Exercício 25.** Na figura abaixo,  $ABCDE$  é um pentágono regular de lado  $a$  e os arcos  $AB, BC, CD, DE$  e  $EA$  são congruentes e arcos de circunferência cujo raio mede  $a$ . Assim, determine a área hachurada nessa figura, em

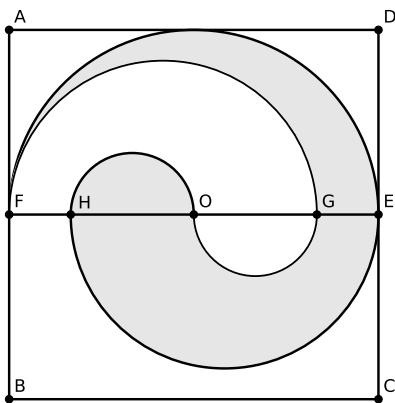


função de "a".

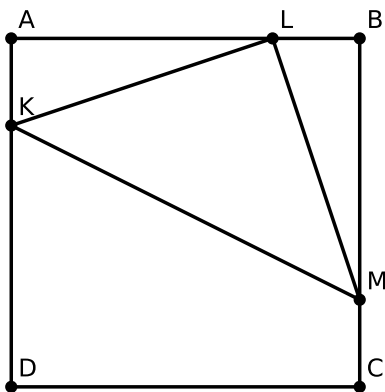
**Exercício 26.** Na figura abaixo,  $ABCD$  é um quadrado de lado 12 e  $BE$  é um segmento de comprimento 16. Determine o comprimento do segmento  $AF$ .



**Exercício 27.** Dado o quadrado  $ABCD$  de lado 2. Sejam  $O$  o centro do quadrado e  $E$  e  $F$  os pontos médios dos lados  $AB$  e  $CD$ . Se os segmentos  $FH$  e  $GE$  são iguais e os arcos  $FE, EH, GO, OG, FG$  são semicircunferências, encontre a área sombreada.



**Exercício 28.** Na figura a seguir,  $ABCD$  é um quadrado de lado 4,  $K$  pertence ao lado  $AD$ ,  $L$  pertence ao lado  $AB$ ,  $M$  pertence ao lado  $BC$  e  $KLM$  é um triângulo retângulo isósceles, sendo  $L$  o ângulo reto. Então a área do quadrilátero  $CDKM$  é igual a



- a) 6    b) 8    c) 10    d) 12    e) 14

## Respostas e Soluções

### 1 Exercícios Introdutórios

1.

a)  $A = 8 \cdot 4 = 32cm^2$ .

b) A altura  $h$  mede  $12 \cdot \sin 30^\circ = 6cm$  e a base  $b$  mede  $12 \cdot \cos 30^\circ = 6\sqrt{3}cm$ . Assim

$$A = 6 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}cm^2.$$

2.

a)  $A = 8^2 = 64cm^2$ .

b)  $A = 7,1^2 = 50,41cm^2$ .

c)  $A = (\sqrt{3})^2 = 3cm^2$ .

d) Se a diagonal mede  $6cm$ , o lado mede  $3\sqrt{2}cm$ , então a área é  $A = (3\sqrt{2})^2 = 18cm^2$ .

3.

a)  $l = \sqrt{25} = 5cm$ .

b)  $l = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}cm$ .

4.

a)  $A = (5 \cdot 8)/2 = 20cm^2$ .

b) Se  $2b$  é o comprimento da outra diagonal, como as diagonais de um losango são perpendiculares, usando o Teorema de Pitágoras obtemos:

$$\begin{aligned} b^2 + 3^2 &= 5^2 \\ b &= \sqrt{5^2 - 3^2} \\ b &= 4. \end{aligned}$$

Portanto, a outra diagonal mede  $8cm$  e a área do losango vale  $A = 24cm^2$ .

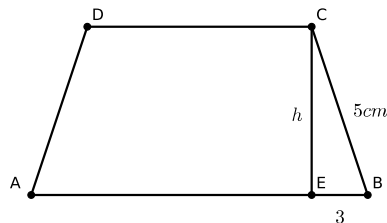
c) Dois ângulos internos consecutivos de um losango são suplementares. Assim, um de seus ângulos internos será  $60^\circ$ . Temos, então, dois triângulos equiláteros de lados medindo  $8cm$ . A área de cada um deles é  $\frac{8^2\sqrt{3}}{4}$ . Portanto, a área do losango é  $2 \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 32\sqrt{3}cm^2$ .

5.  $A = \frac{4(5+7)}{2} = 24cm^2$ .

6. Podemos usar o Teorema de Pitágoras para encontrarmos a altura  $h$ .

$$\begin{aligned} h^2 + 3^2 &= 5^2 \\ h &= \sqrt{5^2 - 3^2} \\ h &= 4. \end{aligned}$$

Daí, segue que  $A = \frac{4(6+12)}{2} = 36cm^2$ .



7.

a)  $A = 6 \cdot 4 = 24cm^2$ .

b) Temos que a altura do paralelogramo mede  $6 \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$ . Daí, segue que  $A = 8 \cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}cm^2$ .

8.

a)  $A = (8 \cdot 5)/2 = 20$ .

b) Pelo Teorema de Pitágoras, a medida do outro cateto é  $12cm$ . Daí, segue que  $A = (12 \cdot 5)/2 = 30$ .

c)  $A = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}cm^2$ .

d)  $A = \frac{6 \cdot 8 \cdot \sin 45^\circ}{2} = 12\sqrt{2}cm^2$ .

### 2 Exercícios de Fixação

9. Se o perímetro é  $72cm^2$ , então o lado é  $72/4 = 18cm$ , segue que  $A = 18^2 = 324cm^2$ .

10. Chamando a altura de  $x$ , a base é  $2x$ . Temos, então, que  $2x^2 = 450$ . Daí segue que  $x = 15$ . Portanto, as dimensões do retângulo são  $15cm$  e  $30cm$ .

11. Sendo  $x$  e  $y$  as dimensões iniciais, temos  $xy = 100$ . Após as modificações nas dimensões, sua área será

$$A = 0,9x \cdot 1,1y = 0,99 \cdot 100 = 99cm^2.$$

12.

a) A altura de um triângulo de lado  $8$  é  $(8\sqrt{3})/2 = 4\sqrt{3}$ . Como o raio do círculo inscrito é a terça parte da altura do triângulo, o raio do círculo do desenho mede  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ . Assim, a área da região hachurada pode ser calculada pela diferença entre as áreas do triângulo equilátero e do círculo.

$$\begin{aligned} A_{hachurada} &= A_{\text{triângulo equilátero}} - A_{\text{círculo}} \\ A &= \frac{8^2\sqrt{3}}{4} - \pi \left( \frac{4\sqrt{3}}{3} \right)^2 \\ &= 16\sqrt{3} - \frac{16\pi}{3} \\ &= \frac{48\sqrt{3} - 16\pi}{3} cm^2 \end{aligned}$$

- b) A área hachurada é a diferença entre as áreas do quadrado e do setor circular (quarta parte do círculo).

$$\begin{aligned} A_{hachurada} &= A_{\text{quadrado}} - A_{\text{setor}} \\ &= 10^2 - \frac{10^2\pi}{4} \\ &= 100 - 25\pi \\ &= 25(4 - \pi)cm^2 \end{aligned}$$

- c) A medida do ângulo do setor circular é  $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ , que equivale a  $1/3$  do círculo. Temos, então

$$A = \frac{6^2\pi}{3} = 12\pi cm^2.$$

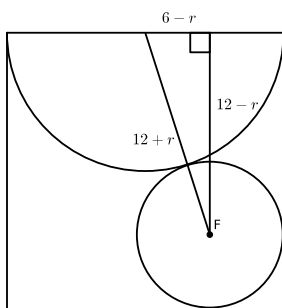
**13.** (Extraído do ENEM 2013) Como a área inicial era  $30 \cdot 15 = 450cm^2$  e a área final ficou  $(30 - 6)(15 - 3) = 288cm^2$ , sua redução foi de  $\frac{450 - 288}{450} = 0,36 = 36\%$ . Resposta C.

**14.**

- a) A área hachurada é a diferença entre as áreas do setor circular e do triângulo. Temos então

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{8}\pi 8^2 - \frac{8 \cdot 8 \cdot \text{sen } 135^\circ}{2} \\ &= 24\pi - 16\sqrt{2} \\ &= 8(\pi - \sqrt{2})cm^2 \end{aligned}$$

- b) Para o cálculo do raio  $r$ , utilizaremos o Teorema de Pitágoras no triângulo formado pela reta que passa pelos centros das duas circunferências, pelo centro da circunferência menor e é perpendicular ao lado do quadrado e pelo lado do quadrado como indica a figura abaixo.



Os lados deste triângulo são  $(6 + r)$ ,  $(6 - r)$  e  $(12 - r)$ . Temos, então

$$\begin{aligned} (6 + r)^2 &= (6 - r)^2 + (12 - r)^2 \\ 12r &= -12r + 144 - 24r + r^2 \\ r^2 - 48r + 144 &= 0 \\ r &= 12(2 - \sqrt{3})cm \end{aligned}$$

Assim, a área do círculo menor é  $\pi[12(2 - \sqrt{3})]^2 = 144(7 - 4\sqrt{3})cm^2$

- c) Traçando um segmento pelos pontos de intersecção das circunferências, teremos dois segmentos circulares, cujas áreas são a diferença entre as áreas dos setores circulares e dos triângulos gerados. A medida do ângulo destes setores é  $120^\circ$ , pois pode-se formar dois triângulos equiláteros ligando os centros das circunferências e seus pontos de intersecção. A distância entre estes pontos de intersecção é  $4\sqrt{3}cm$ , pois é o dobro da altura de um dos triângulos. Temos, então

$$\begin{aligned} A &= 2 \left( \frac{4^2\pi}{3} - \frac{4 \cdot 4 \cdot \text{sen } 120^\circ}{2} \right) \\ &= 2 \left( \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3} \right) \\ &= 4 \left( \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} \right) cm^2 \end{aligned}$$

### 3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

**15.** (Extraído do ENEM 2012) A área perdida é a diferença entre as áreas inicial e final. Temos, então

$$\begin{aligned} A &= 15 - (5 - x)(3 - y) \\ &= 15 - 15 + 3x + 5y - xy \\ &= 5y + 3x - xy \end{aligned}$$

Resposta E.

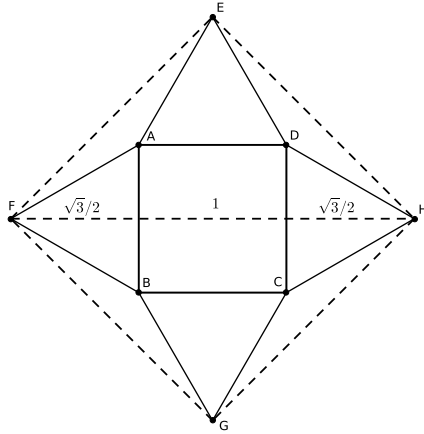
**16.** (Extraído do ENEM 2012) Calculando a área  $ABPD$ , temos

$$\begin{aligned} [ABPD] &= [ABD] - [PBD] \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} - \frac{1 \cdot \frac{1}{4}}{2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{8}m^2 \end{aligned}$$

Consequentemente, a soma das áreas não sombreadas é  $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$  e a área restante é  $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ . Temos, então, que o custo é  $\frac{1}{4} \cdot 50 + \frac{3}{4} \cdot 30 = 12,50 + 22,50 = R\$35,00$ . Resposta B.

**17.** (OBM 2014) Como cada triângulo equilátero tem altura  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , as diagonais do quadrado  $EFGH$  medem  $1 + \sqrt{3}$ , e sua área pode ser calculada como  $\frac{(1 + \sqrt{3})^2}{2} = 2 + \sqrt{3}$ . Resposta C.





18. (Extraído da OBMEP 2005)

a) Sendo  $a$  o lado de cada quadrado, temos

$$\begin{aligned} [EFGH] &= [ABCD] - 4[AEH] \\ &= 16a^2 - 6a^2 \\ &= 10a^2 = \frac{10}{16}[ABCD] \end{aligned}$$

b) Sendo  $A$  a área do quadrado sombreado, temos

$$\begin{aligned} A &= [EFGH]/2 \\ &= \frac{10}{32}[ABCD] \\ &= 25cm^2 \end{aligned}$$

Portanto, o lado do quadrado sombreado é  $5cm$ .

19. (extraído da OBMEP 2005)

a) A área de cada canteiro de pedra para  $x = 2$  vale  $\frac{2 \cdot 8}{2} = 8$ . Assim, a área do canteiro de grama é  $100 - 4 \cdot 8 = 68m^2$ .

b) A área de cada canteiro triangular é dada pela expressão  $\frac{x(10-x)}{2}$ . Assim, a área do canteiro de grama é dada por:

$$100 - 4 \cdot \frac{x(10-x)}{2} = 2x^2 - 20x + 100m^2$$

c) Como a diferença entre os preços das coberturas de pedra e grama é de 1, o custo total é o mesmo que gastar 3 por metro quadrado em todo o quadrado e 1 extra pela área dos canteiros de grama, ou seja, o custo total é:

$$3 \cdot 100 + 1 \cdot (2x^2 - 20x + 100) = 2x^2 - 20x + 400.$$

Fatorando a expressão anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 20x + 200 &= 2(x-5)^2 + 350 \\ &\geq 0^2 + 350 \\ &= 350. \end{aligned}$$

A igualdade ocorre apenas quando  $x = 5$ . Assim, o prefeito precisa de pelo menos  $R\$150,00$  reais.

20. (OBM 2014) Como a diagonal de um retângulo o divide em dois triângulos de mesma área, as áreas dos triângulos sombreados são  $8m^2$  e  $18m^2$ . Observando, agora, o retângulo original, sua diagonal o dividiu em dois triângulos, sendo um deles com área  $24 + 8 + 18 = 50m^2$ , ou seja, a área do retângulo original é  $100m^2$ . Resposta D.

21. (Extraído da OBM 2013)

- a) Como  $A_{CBE} = A_{EDC}$ , pois possuem a mesma base e mesma altura, então, decompondo ambas as áreas,  $A_{ABC} + A_{ACE} = A_{ADE} + A_{ACE}$ , segue que  $A_{ABC} = A_{ADE}$ .
- b) Traçando o segmento  $GH$ , temos, pelo item anterior, que  $A_{AGH} = A_{ABC} = 5cm^2$  e  $A_{DGH} = A_{DEF} = 4cm^2$ . Temos então que  $A_{AGDH} = A_{AGH} + A_{DGH} = 5 + 4 = 9cm^2$ .

22. (Extraído da OBM 2012) Como a área total do terreno é  $160 \cdot 120 - 60 \cdot 50 = 16200m^2$ , cada parte deverá ter  $8100m^2$ . Calculando a área do trapézio  $ABCP$ , temos

$$\begin{aligned} [ABCP] &= 8100 \\ \frac{(120 - x + 50)100}{2} &= 8100 \\ 170 - x &= 162 \\ x &= 8m. \end{aligned}$$

Resposta B.

23. (Extraído da OBM 2012) Se  $P$  o pé da altura do  $\triangle DEC$  no lado  $DC$ , então  $EP = 4\sqrt{3}$ . Temos que

$$\begin{aligned} [AEC] &= [AECD] - [ACD] \\ &= [AEPD] + [ECP] - [ACD] \\ &= \frac{4(6 + 4\sqrt{3})}{2} + \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} - 24 \\ &= 12 + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 24 \\ &= 16\sqrt{3} - 12 \\ &= 4(4\sqrt{3} - 3). \end{aligned}$$

**24.** (Extraído da EPCAR 2014) Como os arcos são congruentes, o  $\triangle ABC$  é equilátero, sendo  $120^\circ$  a medida do seu ângulo central e a medida do raio da circunferência maior o dobro do raio da menor, ou seja,  $2\text{cm}$ . Dividiremos a área hachurada em três partes:

- i) área de  $2/3$  do círculo menor, que é  $2\pi/3$ ;
- ii) área do segmento do círculo maior, que é  $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$ ;
- iii) área do quadrilátero formado por dois segmentos perpendiculares aos lados do triângulo partindo do centro do círculo menor, que é  $\sqrt{3}$ .

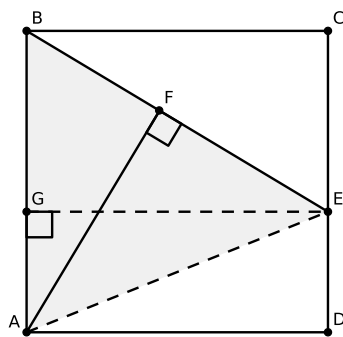
Portanto, a área hachurada é  $2\pi/3 + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\pi$ . Resposta A.

**25.** (Extraído da EPCAR 2013 - Adaptada) Sendo cada uma das cinco partes hachuradas a área de um segmento circular de uma circunferência de raio que mede  $a$ , temos que a área hachurada é  $5\left(\frac{a^2\pi}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$

**26.** A área do triângulo  $ABE$  é  $\frac{AB \cdot GE}{2} = 72$ . Assim, aplicando a mesma fórmula de área para a base  $BE$  e a altura  $AF$ , temos:

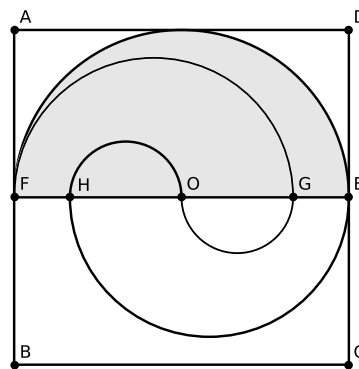
$$72 = \frac{AF \cdot BE}{2} = \frac{AF \cdot 16}{2} = 8AF.$$

Portanto, o comprimento de  $AF$  é  $\frac{72}{8} = 9$ .



**27.** Como  $FH = GE$ , temos  $HO = FO - FH = OE - GE = OG$ . Consequentemente o semicírculo de diâmetro  $HO$  possui a mesma área do semicírculo de diâmetro  $OG$ . Além disso, a área entre os arcos  $FG$  e  $HO$  é igual à área entre os arcos  $GO$  e  $HE$ . Consequentemente, a área procurada corresponde a área de um semicírculo de diâmetro  $FE$ . Como o raio do semicírculo de diâmetro  $FE$  mede 1, a área sombreada mede  $\frac{1^2\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ .

**28.** (Extraído da OBM 2009) Temos  $\angle ALK = 180^\circ - \angle KLM - \angle BLM = 180^\circ - 90^\circ - \angle BLM =$



$90^\circ - \angle BLM = \angle BLM$ , ambos os ângulos  $\angle KAL$  e  $\angle LBM$  são retos. Como  $KL = LM$ , segue que os triângulos  $KAL$  e  $LBM$  são congruentes pelo caso  $LAA_o$ . Portanto, sendo  $x = AK$ ,  $AL = 4 - x$ ,  $LB = x$  e  $BM = AL = 4 - x$ . Logo a área do trapézio  $AKMB$  é igual a  $\frac{AK + BM}{2} \cdot AB = \frac{x + (4 - x)}{2} \cdot 4 = 8$  e, conseqüentemente, a área de  $CDKM$  é  $4^2 - 8 = 8$ . Resposta B

Observação. De fato, os trapézios  $AKMB$  e  $KMCD$  são iguais.