Inequações Mistas e Sistemas

Inequações Mistas

1° ano E.M.

Material elaborado por Lorena Bulhosa

Inequações Mistas e Sistemas
Inequações Mistas

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $(1-2x)(2x^2+3x+1) \geq 0$

b) $(x+3)(x^2-36) < 0$

c) $(x^2-x-6)(1-x) \leq 0$

Exercício 2. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\frac{x+1}{x^2-5x-14} \geq 0$

b) $\frac{(2-x)(x+3)}{x-5} < 0$

c) $\frac{(1-x)(x^2-16)}{2+x} \geq 0$

Exercício 3. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\frac{2}{x-1} + \frac{5}{x+6} \geq 0$

b) $\frac{3}{2x+4} < \frac{-1}{2+x}$

c) $\frac{2}{(4-x)(5+x)} > \frac{3}{5+x} - \frac{1}{x-4}$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Qual é o número de soluções inteiras da inequação

$$\frac{(x-\sqrt{2})(7/2-x)}{\sqrt{x^2-2x+5}} > 0?$$

Exercício 5. Considere as funções reais $f(x) = x(x^2-16)$ e $g(x) = (x^2-36)(x-2)$. Determine os valores reais de x para os quais

a) $f(x) < 0$

b) $g(x) < 0$

c) $f(x)g(x) > 0$

Exercício 6. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação

$$(x-5/2)(-x^2+5x-6)(4-x) > 0.$$

Exercício 7. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação

$$\frac{(3-x)(2x^2-3x+1)}{1-x^2} \leq 0.$$

Exercício 8. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação

$$\frac{1}{x^2+2x-3} + \frac{2}{x+3} < \frac{1}{x-1}.$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 9. (Ibmecrj2009) A soma dos quadrados dos números naturais que pertencem ao conjunto-solução de $\frac{(3-x)(x^2-1)}{x+2} \geq 0$ é igual a :

a)13 b)14 c)15 d)19 e)20

Exercício 10. A função $\sqrt{\frac{3-x}{x^2-3x+2}} + 1$ tem como domínio maximal o conjunto-solução

a) $\{x \in \mathbb{R}; x \leq 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}; 2 \leq x \leq 3\}$

b) $\{x \in \mathbb{R}; x \neq 1 \quad e \quad x \neq 2\}$

c) $\{x \in \mathbb{R}; x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}; 2 < x \leq 3\}$

d) $\{x \in \mathbb{R}; 1 \leq x \leq 2\} \cup \{x \in \mathbb{R}; x > 3\}$

e) $\{x \in \mathbb{R}; x \leq 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}; 2 \leq x < 3\}$

Exercício 11. Determine o menor t natural tal que

$$\frac{t-2}{t(t^2-9)} > 0.$$

Exercício 12. Sejam m_1 e m_2 o menor inteiro e o menor natural no conjunto-solução de

$$\frac{(3+m)(m^2-1)}{m} \leq 0.$$

Determine $m_1 + m_2$.

Exercício 13. Seja $f : D \to C$ real, tal que $f(x) = x + 5/x$ e $C = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}; x > 1\}$. Determine o maior conjunto D tal que $f(D) \subseteq C$.

Exercício 14. Determine a soma dos inteiros que pertencem ao conjunto-solução de

$$-\frac{1}{2}(3+x)(x^2-2x-3)(x+1) \geq 0.$$

Respostas e Soluções.

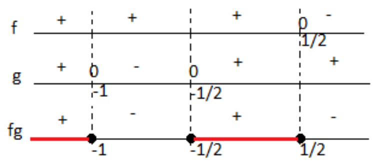
1.

a) Denotando $f(x) = 1 - 2x$, $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$ e estudando os sinais das funções temos

$$f(x)\begin{cases} < 0, & se \quad x > 1/2 \\ = 0, & se \quad x = 1/2 \\ > 0, & se \quad x < 1/2 \end{cases}$$

$$g(x)\begin{cases} < 0, & se \quad -1 < x < -1/2 \\ = 0, & se \quad x = -1 \quad ou \quad x = -1/2 \\ > 0, & se \quad x < -1 \quad ou \quad x > -1/2. \end{cases}$$

Assim,



O conjunto-solução é $S =]-\infty, -1] \cup [-1/2, 1/2]$.

b) Denotando $f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2 - 36$, estudando os sinais das funções e fazendo a tabela de sinais temos conjunto-solução $S =]-\infty, -6[\cup]3, 6[$.

c) Denotando $f(x) = x^2 - x - 6$, $g(x) = 1 - x$, estudando os sinais das funções e fazendo a tabela de sinais temos conjunto-solução $S = [-2, 1] \cup [3, +\infty[$.

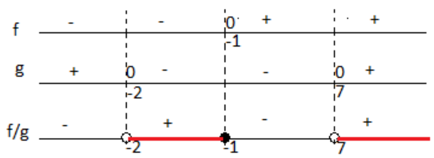
2.

a) Denotando $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 - 5x - 14$ e estudando os sinais das funções temos

$$f(x)\begin{cases} < 0, & se \quad x < -1 \\ = 0, & se \quad x = -1 \\ > 0, & se \quad x > -1 \end{cases}$$

$$g(x)\begin{cases} < 0, & se \quad -2 < x < 7 \\ = 0, & se \quad x = -2 \quad ou \quad x = 7 \\ > 0, & se \quad x < -2 \quad ou \quad x > 7. \end{cases}$$

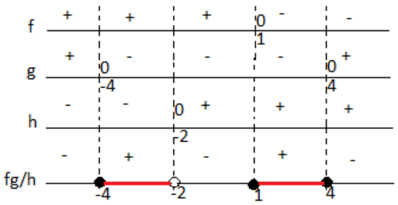
Lembrando que o denominador não pode se anular, temos a tabela de sinais



O conjunto-solução é $S =]-2, -1] \cup]7, +\infty[$.

b) Denotando $f(x) = (2 - x)(x + 3)$, $g(x) = x - 5$, estudando os sinais das funções e fazendo a tabela de sinais temos conjunto-solução $S =]-3, 2[\cup]5, +\infty[$.

c) Denotando $f(x) = 1 - x$, $g(x) = x^2 - 16$, $h(x) = 2 + x$, estudando os sinais das funções e fazendo a tabela de sinais temos conjunto-solução $S = [-4, -2[\cup [1, 4]$.



3. a)

$$\frac{2}{x-1} + \frac{5}{x+6} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{7x+7}{(x-1)(x+6)} \geq 0$$

Denotando $f(x) = 7x + 7$, $g(x) = (x - 1)(x + 6)$, estudando os sinais das funções e fazendo a tabela de sinais temos conjunto-solução $S =]-6, -1] \cup]1, +\infty[$.

b)

$$\frac{3}{2x+4} < \frac{-1}{2+x} \Leftrightarrow \frac{5x+10}{(2x+4)(x+2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2x+4} < 0,$$

já que $x \neq -2$, porque o denominador não pode ser zero. Como $5 > 0$, devemos ter $2x + 4 < 0$, isto é, $x < -2$. O conjunto-solução é $S =]-\infty, -2[$.

c)

$$\frac{2}{(4-x)(5+x)} > \frac{3}{5+x} - \frac{1}{x-4} \Leftrightarrow \frac{2x-15}{(4-x)(5+x)} > 0$$

Denotando $f(x) = 2x - 15$, $g(x) = (4 - x)(5 + x)$, estudando os sinais das funções e fazendo a tabela de sinais temos conjunto-solução $S =]-\infty, -5[\cup]4, 15/2[$.

4. O denominador é não negativo, pois é uma raiz quadrada, mas temos que eliminar o valor de x que faz ele se anular. A função $f(x) = x^2 - 2x + 5$ tem valor de delta negativo e coeficiente angular positivo, logo seu gráfico está totalmente acima do eixo das abscissas e f nunca se anula. Com isso a inequação é equivalente a $(x - \sqrt{2})(7/2 - x) > 0$, a qual tem conjunto-solução $S =]\sqrt{2}, 7/2[$. Os inteiros nesse intervalo são 2 e 3. Assim, há duas soluções inteiras da inequação inicial.

5. a) Denotando $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2 - 16$, estudando os sinais dessas funções e fazendo a tabela de sinais com os sinais de f_1, f_2 e $f_1 f_2$, temos $f < 0$ em $]-\infty, -4[\cup]0, 4[$.

b) Denotando $g_1(x) = x^2 - 36$, $g_2(x) = x - 2$, estudando os sinais dessas funções e fazendo a tabela de sinais com os sinais de g_1, g_2 e $g_1 g_2$, temos $g < 0$ em $]-\infty, -6[\cup]2, 6[$.

c) Aqui, note que $fg < 0$ quando f e g são negativas ou quando f e g são positivas. Fazendo a tabela de sinais de f, g e fg, temos $fg < 0$ em $]-\infty, -6[\cup]-4, 0[\cup]2, 4[\cup]6, +\infty[$.

6. Denotando $f(x) = x - 5/2$, $g(x) = -x^2 + 5x - 6$ e $h(x) = 4 - x$, estudando os sinais dessas funções, e fazendo a tabela de sinais com os sinais de f, g, h e fgh, temos $fgh > 0$ em $S =]-\infty, 2[\cup]5/2, 3[\cup]4, +\infty[$.

7. Denotando $f(x) = 3 - x$, $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$ e $h(x) = 1 - x^2$, estudando os sinais dessas funções, e fazendo a tabela de sinais com os sinais de f, g, h e fg/h, temos $fg/h \leq 0$ em $S =]-\infty, -1[\cup [1/2, 1[\cup]1, 3]$. Lembrando que a fração não está definida nos pontos onde o denominador é nulo.

8.

$$\frac{1}{x^2+2x-3} + \frac{2}{x+3} < \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x-4}{x^2+2x-3} < 0$$

Denotando $f(x) = x - 4$ e $g(x) = x^2 + 2x - 3$, estudando os sinais dessas funções, e fazendo a tabela de sinais com os sinais de f, g e f/g, temos $f/g < 0$ em $S =]-\infty, -3[\cup]1, 4[$. Lembrando que a fração não está definida nos pontos onde o denominador é nulo.

9. Denotando $f(x) = 3 - x$, $g(x) = x^2 - 1$ e $h(x) = x + 2$, analisando os sinais dessas funções e de fg/h, temos o conjunto-solução $S =]-2, -1] \cup [1, 3]$. Lembrando que para valores de x onde o denominador se anula, a fração não está definida. Os naturais em S são $1, 2, 3$. A soma dos quadrados é $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$. Letra (b).

10. A função está bem definida nos valores de x que satisfazem a inequação $\frac{3-x}{x^2-3x+2} \geq 0$. O conjunto-solução dessa inequação é $S =]-\infty, 1[\cup]2, 3]$. Letra (c).

11. A inequação tem conjunto-solução $S =]-\infty, -3[\cup]0, 2[\cup]3, +\infty[$. Os naturais em S são 1 e todos os naturais maiores que 3, isto é, $3, 4, 5, \ldots$. O menor natural é, portanto, $t = 1$.

12. A inequação tem conjunto-solução $S = \{-3\} \cup [-1, 0[\cup [1, +\infty[$. O menor inteiro é $m_1 = -3$ e o menor natural é $m_2 = 1$, assim $m_1 + m_2 = -2$.

13.

$$\begin{aligned} & x + \frac{5}{x} \leq 0 \quad ou \quad x + \frac{5}{x} > 1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x^2+5}{x} \leq 0 \quad ou \quad \frac{x^2-x+5}{x} > 0 \\ \Leftrightarrow\ & x < 0 \quad ou \quad x > 0. \end{aligned}$$

Assim, $D = \{x \in \mathbb{R}; x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}; x > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

14.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(3+x)(x^2-2x-3)(x+1) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (3+x)(x^2-2x-3)(x+1) \leq 0 \end{aligned}$$

Denotando $f(x) = 3 + x$, $g(x) = x^2 - 2x - 3$ e $h(x) = x + 1$, analisando os sinais dessas funções e do produto fgh, temos o conjunto-solução $[-3, 3]$. Os inteiros no conjunto são $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, e têm soma zero.

Material elaborado por Lorena Bulhosa