Módulo de Círculo Trigonométrico

Secante, Cossecante e Cotangente.

1ª série E.M.

Círculo Trigonométrico
Secante, Cossecante e Cotangente.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Seja $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ tal que $\operatorname{sen}\alpha = -1$, determine, se existir, o resultado de todas as razões trigonométricas de α.

Exercício 2. Seja $\beta \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\cos\beta = -0,6$, determine, se existir:

a) $\operatorname{sen}\beta$;

b) $\cos\beta$;

c) $\operatorname{tg}\beta$;

d) $\operatorname{cotg}\beta$;

e) $\sec\beta$;

f) $\operatorname{cossec}\beta$.

Exercício 3. Definindo a $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, demonstre, a partir da relação fundamental da trigonometria, que

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x.$$

Exercício 4. Qual o resultado obtido após a simplificação de

$$E = (\sec x - \cos x) \cdot (\operatorname{cossec} x - \operatorname{sen} x) \cdot (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)?$$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Se $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2}{3}$ e $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Quais os valores de $\operatorname{cossec}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ e $\operatorname{cossec}\alpha$?

Exercício 6. Sabendo que $\operatorname{cossec} x = 5/4$ e x é do primeiro quadrante, qual o valor da expressão $9 \cdot \left(\sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x\right)$?

Exercício 7. Se $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$, calcule o valor de

$$x = \frac{\sec^2\alpha - \sec\alpha \cdot \operatorname{cossec}\alpha}{1 - \operatorname{cotg}\alpha}.$$

Exercício 8. Seja x um número real positivo tal que

$$\sec x - \operatorname{tg} x = 1.$$

Calcule $\sec x + \operatorname{tg} x$.

Exercício 9. Calcule uma expressão equivalente a

$$\operatorname{cotg}(2x) + \operatorname{cossec}(2x).$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 10. Sabendo que $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, o valor de $\dfrac{\operatorname{cossec} x - \sec x}{\operatorname{cotg} x - 1}$

Exercício 11. Quais os valores de t pra que tenhamos

$$(\cos\alpha)t^2 - 2t + \cos\alpha = 0?$$

Exercício 12. Se o número real x é tal que $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$ e $\sec x = -\sqrt{5}$, então $\operatorname{cotg} x$ é igual a

Exercício 13. A partir das fórmulas do cosseno da soma e do cosseno da diferença, prove que:

a) $\cos(a+b) - \cos(a-b) = 2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$.

b) $\cos 1^\circ - \cos 45^\circ = 2 \cdot \operatorname{sen} 23^\circ \cdot \operatorname{sen} 22^\circ$.

c) $1 - \operatorname{cotg} 23^\circ = \dfrac{2}{1 - \operatorname{cotg} 22^\circ}$.

Exercício 14.

a) Prove que $\operatorname{sen}(2x) = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

b) Prove que $\cos x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

c) Se $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ é um número racional ($\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), prove que $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ são números racionais.

d) Prove que $\operatorname{tg} x = \operatorname{cossec}(2x) - \operatorname{cotg}(2x)$.

e) Reciprocamente, se $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ são números racionais, prove que $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ é número racional.

Exercício 15. Resolva a equação trigonométrica

$$(\operatorname{sen})^3 x(1 + \operatorname{cotg} x) + (\cos)^3 x(1 + \operatorname{tg} x) = \cos(2x),$$

sendo $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Exercício 16. Sendo $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ e $\operatorname{tg}\alpha \cdot \sec\alpha = \dfrac{1}{5}$, calcule o valor do $\operatorname{sen}\alpha$.

Respostas e Soluções.

1. (Extraído da Vídeo Aula)
Se $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ e $\operatorname{sen}\alpha = -1$, então $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ e

i) $\operatorname{sen}\alpha = -1$.

ii) $\cos\alpha = 0$.

iii) $\operatorname{tg}\alpha = \nexists$.

iv) $\operatorname{cotg}\alpha = 0$.

v) $\sec\alpha = \nexists$.

vi) $\operatorname{cossec}\alpha = -1$.

2. (Extraído da Vídeo Aula)
Como $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\pi\right]$, teremos o seno, o cosseno, a secante, e a cossecante com sinais negativos e as tangente e cotangente positivas. Seguindo com a relação fundamental da trigonometria, teremos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta &= 1 \\ \operatorname{sen}^2\beta + (-0,6)^2 &= 1 \\ \operatorname{sen}\beta &= -0,8. \end{aligned}$$

Portanto:

a) $\operatorname{sen}\beta = -0,8$;

b) $\cos\beta = -0,6$;

c) $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$;

d) $\operatorname{cotg}\beta = \frac{3}{4}$;

e) $\sec\beta = -\frac{5}{3}$;

f) $\operatorname{cossec}\beta = -\frac{5}{4}$.

3. Podemos dividir a relação por $\cos^2 x \neq 0$ obtendo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ \operatorname{tg}^2 x + 1 &= \sec^2 x \end{aligned}$$

$\blacksquare$

4.

$$\begin{aligned} E &= (\sec x - \cos x)\cdot(\operatorname{cossec} x - \operatorname{sen} x)\cdot(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x) \\ &= \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right)\cdot\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x\right)\cdot\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) \\ &= \left(\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\right)\cdot\left(\frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}\right)\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}\right) \\ &= \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\right)\cdot\left(\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}\right)\cdot\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}\right) \\ &= (\operatorname{sen} x\cdot\cos x)\cdot\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

5. Como α está no 1° quadrante, todas as suas razões trigonométricas são positivas. Pela relação fundamental teremos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \cos x &= \frac{\sqrt{5}}{3}. \end{aligned}$$

Agora, resolvendo o que foi pedido, teremos

i) $\sec\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$;

ii) $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$; e

iii) $\operatorname{cossec}\alpha = \frac{3}{2}$.

6. (Adaptado do vestibular da UFSC)
Como $x \in [0, \pi]$, então todas as suas razões trigonométricas são positivas. Tendo $\operatorname{cossec} x = 5/4$, chegamos a $\operatorname{sen} x = 4/5$ e, pela relação fundamental da trigonometria, $\cos x = 3/5$. Por fim, $\sec x = 5/3$, $\operatorname{tg} x = 4/3$ e

$$9\cdot\left(\sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x\right) = 9\cdot\left[\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2\right] = 41.$$

7. Simplificando a equação em função do seno e do cosseno de α chega-se a

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sec^2\alpha - \sec\alpha\cdot\operatorname{cossec}\alpha}{1-\operatorname{cotg}\alpha} \\ &= \frac{\sec\alpha(\sec\alpha - \operatorname{cossec}\alpha)}{1-\operatorname{cotg}\alpha} \\ &= \frac{1}{\cos\alpha}\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{\cos^2\alpha} \\ &= 16. \end{aligned}$$

8. Desenvolvendo a equação inicial, destacando que $\cos x \neq 0$, chegamos a

$$\begin{aligned}
\sec x - \tan x &= 1\\
\frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} &= 1\\
\frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} &= 1\\
1 - \operatorname{sen} x &= \cos x
\end{aligned}$$

Substituindo na relação fundamental, teremos $\operatorname{sen} x = 0$ (com $\cos x = 1$) ou $\operatorname{sen} x = 1$. Apenas o primeiro serve, pois para o segundo teríamos $\cos x = 0$, **absurdo**. Por fim, $\sec x = 1$ e $\operatorname{tg} x = 0$. Portanto,

$$\sec x + \operatorname{tg} x = 1.$$

9. (Adaptado do vestibular da UDESC - 2012)

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotg}(2x) + \operatorname{cossec}(2x) &= \frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)} + \frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}\\
&= \frac{\cos(2x) + 1}{\operatorname{sen}(2x)}\\
&= \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 1}{2 \operatorname{sen} x \cos x}\\
&= \frac{\cos^2 x + \cos^2 x}{2 \operatorname{sen} x \cos x}\\
&= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\\
&= \operatorname{cotg} x
\end{aligned}$$

10. (Adaptado do vestibular da UFV MG)
Como $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ teremos que o cosseno, a tangente, a cotangente e a secante com sinais negativos e o seno e a cossecante positivos. Seguindo com a relação fundamental da trigonometria, teremos $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ e, desenvolvendo o que foi pedido, chegamos a

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{cossec} x - \sec x}{\operatorname{cotg} x - 1} &= \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - 1}\\
&= \frac{1}{\cos x}.\\
&= -\frac{3\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

11. (Adaptado do vestibular da FURG RS)
Para $\cos \alpha = 0$, teremos $t = 0$. Caso contrário, resolvendo a equação do 2º grau em t, chegaremos a

$$\Delta = 4 - 4\cos^2 = 4(1 - \cos^2) = 4\operatorname{sen}^2 \alpha$$

e

$$\begin{aligned}
t &= \frac{2 \pm 2 \operatorname{sen} \alpha}{2 \cos \alpha}\\
&= \frac{2}{2\cos \alpha} \pm \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{2 \cos \alpha}\\
&= \sec \alpha \pm \operatorname{tg} \alpha.
\end{aligned}$$

12. (Adaptado do vestibular da UNIFOR CE)
Se $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, então o $\operatorname{sen} x < 0$ e a $\operatorname{cotg} x > 0$. Com $\sec x = -\sqrt{5}$ chegamos a $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ e, pela relação fundamental da trigonometria, $\operatorname{sen} x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. Por fim, obteremos

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2}.$$

13.

a) As fórmulas do cosseno de soma e da subtração são

$$\begin{aligned}
\cos(a + b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad (1)\\
\cos(a - b) &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad (2)
\end{aligned}$$

fazendo (2) − (1), teremos

$$\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

■

b) Usando a fórmula do item a,

$$\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

fazendo $a - b = 1°$ e $a + b = 45°$ teremos $a = 23°$ e $b = 22°$, o que demonstra o pedido. ■

c) Provar o solicitado é equivalente a provar que

$$\begin{aligned}
2 &= (1 - \operatorname{cotg} 23°)(1 - \operatorname{cotg} 22°)\\
&= \left(1 - \frac{\cos 23°}{\operatorname{sen} 23°}\right)\left(1 - \frac{\cos 22°}{\operatorname{sen} 22°}\right)\\
&= \frac{(\operatorname{sen} 23° - \cos 23°)(\operatorname{sen} 22° - \cos 22°)}{\operatorname{sen} 23° \cdot \operatorname{sen} 22°}\\
&= \frac{A - B}{\operatorname{sen} 23° \cdot \operatorname{sen} 22°}
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
A &= \cos 23° \cos 22° + \operatorname{sen} 22° \operatorname{sen} 23°\\
&= \cos(23° - 22°)\\
&= \cos 1°
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
B &= \operatorname{sen} 22° \cos 23° - \operatorname{sen} 23° \cos 22°\\
&= \operatorname{sen}(22° + 23°)\\
&= \cos 45°
\end{aligned}$$

pelo item b, teremos

$$\operatorname{sen} 23° \cdot \operatorname{sen} 22° = \frac{\cos 1° - \cos 45°}{2}.$$

Por fim, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{A - B}{\operatorname{sen} 23° \cdot \operatorname{sen} 22°} &= \frac{\cos 1° - \cos 45°}{\frac{\cos 1° - \cos 45°}{2}}\\
&= 2.
\end{aligned}$$

■

14.

a) Basta desenvolver os dois membros da equação.

b) Basta desenvolver os dois membros da equação.

c) (Extraído da Olimpíada Cearense de Matemática)
Supondo que $\text{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{p}{q}$, p inteiro e q inteiro não nulo e usando as identidades dos itens a e b teremos

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\frac{2p}{q}}{1+\frac{p^2}{q^2}} = \frac{2pq}{p^2+q^2} \text{ e } \cos\alpha = \frac{1-\frac{p^2}{q^2}}{1+\frac{p^2}{q^2}} = \frac{q^2-p^2}{q^2+p^2},$$

o que conclui que $\cos\alpha$ e $\text{sen}\,\alpha$ são também racionais. ■

d) Basta desenvolver os dois membros da equação.

e) (Extraído da Olimpíada Cearense de Matemática)
Utilizando a identidade do item d teremos que

$$\begin{aligned} \text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \text{cossec}\,\alpha - \text{cotg}\,\alpha \\ &= \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} \end{aligned}$$

Como $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a divisão por $\text{sen}\,\alpha$ existe. Além disso, como $\cos\alpha$ e $\text{sen}\,\alpha$ são racionais, $\text{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ é racional.

15. (Adaptado da Olimpíada Pan Africana)
Desenvolvendo o membro da esquerda chegamos a

$$\begin{aligned} (\text{sen}\,x)^3(1+\text{cotg}\,x) + (\cos x)^3(1+\text{tg}\,x) &= \\ (\text{sen}\,x)^2(\text{sen}\,x + \cos x) + (\cos x)^2(\cos x + \text{sen}\,x) &= \\ (\text{sen}\,x)^2 + (\cos x)^2(\text{sen}\,x + \cos x) & \end{aligned}$$

Agora, o membro da esquerda produz o desenvolvimento

$$\begin{aligned} \cos 2x &= (\cos x)^2 - (\text{sen}\,x)^2 \\ &= (\cos x + \text{sen}\,x)(\cos x - \text{sen}\,x) \end{aligned}$$

O que resulta em

$$(\cos x + \text{sen}\,x)(\cos x - \text{sen}\,x - 1) = 0.$$

Então ($\cos x = -\,\text{sen}\,x$), o que resulta em $x = \dfrac{3\pi}{4}$ rad, ou $\cos x - \text{sen}\,x = 1$. A última equação é equivalente à $\text{sen}(45^\circ - x) = \sqrt{2}/2$. Daí, como $0 \leqslant x \leqslant \pi$, segue que $x = 0$. Portanto, $S = \left\{\dfrac{3\pi}{4}, 0\right\}$.

16. A equação $\text{tg}\,\alpha \cdot \sec\alpha \cdot \text{sen}\,\alpha = 3$ é equivalente a $3\cos^2\alpha = \text{sen}^2\alpha$. Agora, substituindo na relação fundamental da trigonometria, chega-se a

$$\begin{aligned} 3\cos^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\ 4\cos^2\alpha &= 1 \\ \cos\alpha &= \pm\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como $\alpha \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, então $\cos\alpha < 0$, o mesmo para o seno e, por fim, $\text{sen}\,\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com