Módulo de Juros e Porcentagem

Introdução à Porcentagem

Sétimo Ano

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Introdução à Porcentagem

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Conforme os exemplos, represente os decimais como porcentagens:

Exemplo i) $0,03 = \dfrac{3}{100} = 3\%$

Exemplo ii) $0,7 = \dfrac{7}{10} = \dfrac{70}{100} = 70\%$

Exemplo iii) $0,258 = \dfrac{258}{1000} = \dfrac{25,8}{100} = 25,8\%$

a) $0,04$.

b) $0,23$.

c) $0,8$.

d) $0,562$.

Exercício 2. Calcule o valor numérico das expressões abaixo:

Exemplo i) $5\% \cdot 80 = \dfrac{5}{100} \cdot 80 = 4$.

Exemplo ii) $12\% \cdot 500 = \dfrac{12}{100} \cdot 500 = 60$.

Exemplo iii) $33,5\% \cdot 420 = \dfrac{33,5}{100} \cdot 420 = \dfrac{335}{1000} \cdot 420 = 140,7$

a) $4\% \cdot 1800$.

b) $36\% \cdot 75$.

c) $24,7\% \cdot 500$.

d) $4\% \cdot 1800$.

Exercício 3. A proposição "de" é utilizada em matemática para indicar a operação de multiplicação, por exemplo:

i) 10% de $40 = 10\% \cdot 40 = \dfrac{10}{100} \cdot 40 = 4$

ii) 23% de $200 = 23\% \cdot 200 = \dfrac{23}{100} \cdot 200 = 46$.

A partir dessa informação, calcule os valores das expressões abaixo.

a) 7% de 900.

b) 36% de 25.

c) 120% de 30.

Exercício 4. Siga o modelo e calcule as porcentagens:

$$\begin{aligned} 5\% \cdot 130 &= \frac{5}{100} \cdot 130 \\ &= \frac{650}{100} \\ &= 6,5. \end{aligned}$$

a) $10\% \cdot 120$.

b) $7\% \cdot 80$.

c) $15\% \cdot 90$.

d) $0,5\% \cdot 200$.

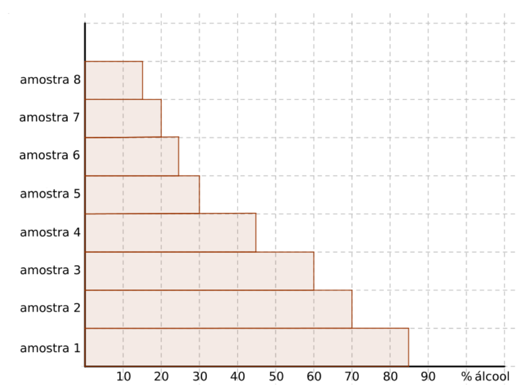
Exercício 5. Calcule:

a) o quadrado de 4% e expresse o resultado como em porcentagens;

b) a raiz quadrada de 64% e expresse o resultado em porcentagens;

c) o valor de 6% de 180.

Exercício 6. Para testar a qualidade de um combustível composto apenas de gasolina e álcool, uma empresa recolheu oito amostras em vários postos de gasolina. Para cada amostra foi determinado o percentual de álcool e o resultado é mostrado no gráfico abaixo. Em quais dessas amostras o percentual de álcool é maior que o percentual de gasolina?



Exercício 7. Contrariando o plano real, um comerciante aumenta o preço de um produto que custava $R\$\ 300,00$ em 20%. Um mês depois arrependeu-se e fez um desconto de 20% sobre o preço reajustado. Qual o novo preço do produto?

Exercício 8. A razão entre o número de meninos e meninas de uma sala de aula é de $\dfrac{7}{3}$. Qual o percentual de meninos da classe?

Exercício 9. Uma pessoa gastou 40% do que tinha e ainda ficou com $R\$\ 570,00$. Quanto essa pessoa gastou?

Exercício 10. Um fabricante de chocolate cobrava $R\$\ 5,00$ por uma barra de 250 gramas. Recentemente o peso da barra foi reduzido para 200 gramas, mas seu preço continuou $R\$\ 5,00$. Qual foi o aumento percentual do preço do chocolate desse fabricante?

Exercício 11. Numa fábrica de tintas, certa quantidade de água deve ser misturada com 840 litros de tinta corante, de modo que a mistura tenha 25% de água. Quantos litros de água deve ter a mistura?

Exercício 12. Um produtor de arroz vendeu 60% da sua produção para a distribuidora A e 40% para a distribuidora B, as quais doaram 4% e 2%, respectivamente, do arroz comprado. Qual a porcentagem do arroz produzido foi doada?

Exercício 13. Descontos sucessivos de 20% e 30% são equivalentes a um único desconto de:

Exercício 14. Um produto sofreu um aumento de 25%. Em seguida, devido a variações no mercado, seu preço teve que ser reduzido também em 25%, passando a custar $R\$225,00$. Qual o preço desse produto antes do aumento?

Exercício 15. Para agilizar as contas de aumentos e descontos sucessivos pode-se trabalhar com os fatores de variação, exemplos:

Exemplo i) Aumento de 10% gera um fator de variação de $100\% + 10\% = 110\% = \dfrac{110}{100} = 1,1.$

Exemplo ii) Redução de 25% gera um fator de variação de $100\% - 25\% = 75\% = \dfrac{75}{100} = 0,75.$

Exemplo iii) Dois aumentos, um de 30% e outro de 40% gera os fatores de variação de:

- $100\% + 30\% = 130\% = \dfrac{130}{100} = 1,3$
- $100\% + 40\% = 140\% = \dfrac{140}{100} = 1,4$

O que finaliza com a sucessão de aumentos com o fator

$$1,3 \cdot 1,4 = 1,82.$$

Ou seja, esses aumentos sucessivos geram um aumento global de

$$\begin{aligned} 100\% + i\% &= 1,82 \\ \frac{100}{100} + \frac{i}{100} &= \frac{182}{100} \\ \frac{i}{100} &= \frac{182}{100} - \frac{100}{100} \\ \frac{i}{100} &= \frac{82}{100} \\ i &= 82 \end{aligned}$$

Portanto, 82% de aumento total.

Exemplo iv) Um aumento de 50% e depois um desconto de 50% gera os fatores de variação de:

- $100\% + 50\% = 150\% = \dfrac{150}{100} = 1,5$
- $100\% - 50\% = 50\% = \dfrac{50}{100} = 0,5$

O que finaliza com a sucessão de variações com o fator

$$1,5 \cdot 0,5 = 0,75.$$

Ou seja, esses aumento e desconto sucessivos geram um resultado global de

$$\begin{aligned} 100\% + i\% &= 0,75 \\ \frac{100}{100} + \frac{i}{100} &= \frac{75}{100} \\ \frac{i}{100} &= \frac{75}{100} - \frac{100}{100} \\ \frac{i}{100} &= -\frac{25}{100} \\ i &= -25 \end{aligned}$$

Sendo assim, 25% de desconto total.

Exemplo v) Dois descontos, um de 20% e outro de 60% gera os fatores de variação de:

- $100\% - 20\% = 80\% = \dfrac{80}{100} = 0,8$
- $100\% - 60\% = 40\% = \dfrac{40}{100} = 0,4$

O que finaliza com a sucessão de aumentos com o fator

$$0,8 \cdot 0,4 = 0,32.$$

Ou seja, esses descontos sucessivos geram um desconto global de

$$\begin{aligned} 100\% + i\% &= 0,32 \\ \frac{100}{100} + \frac{i}{100} &= \frac{32}{100} \\ \frac{i}{100} &= \frac{32}{100} - \frac{100}{100} \\ \frac{i}{100} &= -\frac{68}{100} \\ i &= -68 \end{aligned}$$

Portanto, 68% de desconto total.

Qual o fator de variação em cada uma das situações abaixo?

a) Aumento de 47%.

b) Desconto de 69%.

c) Dois aumentos sucessivos de 50% e 60%.

d) Dois descontos sucessivos de 20% e 10%.

e) Um aumento de 80% seguido de um desconto de 55%.

Exercício 16. Qual situação é mais vantajosa para dois aumentos sucessivos:

- um de 10% seguido de outro de 20% , ou
- um de 20% seguido de outro de 10% ?

Exercício 17. Uma mercadoria que custa $R\$ \ 140,00$ vai sofrer um aumento de 15%. Qual será o seu novo preço?

Exercício 18. Um celular custava $R\$ \ 500,00$ e passou a custar $R\$ \ 800,00$. Qual foi o percentual de aumento do preço?

Exercício 19. Um computador custava $R\$ \ 2000,00$ teve dois ajustes iguais do preço em meses consecutivos e passou a custar $R\$ \ 2420,00$. Qual foi o percentual mensal de ajuste no preço?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 20. Um professor recebia 20 reais por hora de aula dada (hora/aula). Ele teve um aumento de 15 % no valor da hora/aula. Sabendo que ele trabalha 22 dias por mês e 8 horas por dia. Qual o novo salário do professor?

Exercício 21. É frequente nas lojas promoções do tipo

"Leve 4 e pague 3.".

Qual o percentual de desconto que a loja está embutindo nessa compra?

Exercício 22. Joãozinho andava pela rua quando avistou em uma loja o seguinte anúncio:

"Tudo com 50% de desconto.".

Admirado e tratando de se beneficiar com a promoção, Joãozinho entrou na loja e comentou com o vendedor: "Assim vocês devem ter prejuízo..." O vendedor explicou que, ainda assim, a margem de lucro da loja era de 20% sobre cada mercadoria. Neste caso, qual era a margem de lucro sobre cada mercadoria antes da promoção?

Comentário para professores:. O valor arbitrário referência de $R\$ \ 120,00$ para venda não tira a generalidade da solução pois os resultados percentuais não mudam caso o valor de venda seja multiplicado por uma constante. A solução do caso geral é totalmente análoga trocando-se o valor de 120 por p arbitrário. É recomendável induzir os alunos a resolverem inicialmente o problema com valores particulares antes de abordar o caso geral.

Exercício 23. Um tablet custa $R\$ \ 1000,00$ está numa promoção do tipo:

"Pague à vista com 20% ou

a prazo sem juros."

Qual a taxa de juros embutida no pagamento a prazo?

Exercício 24. O valor total de um relógio é de $R\$ \ 1500,00$. Ele pode ser comprado a vista ou em duas parcelas iguais a $R\$ \ 900,00$, uma no momento da compra (denominada por "entrada") e mais uma no início do mês seguinte. Qual a taxa de juros embutida na compra a prazo?

Exercício 25. Um café com apenas 15 gramas de grãos moídos em uma xícara de 100 ml é considerado fraco. Já um café com 30 gramas de grãos moídos, na mesma xícara, é considerado forte. Um sachê de café com 15 gramas custa R$ 0,75. Um apreciador de café forte passou muitos anos consumindo os sachês até que descobriu que existe um pote de café com 300 gramas que custa R$ 10,50.
Com o uso do pote de café estima-se uma média de 10% de desperdício, e com o sachê, nada se perde. Esse consumidor deve optar por continuar com os sachês ou comprar o pote? Qual o percentual de economia com essa escolha?

Exercício 26. Das 100 pessoas que estão em uma sala, 99% são homens. Quantos homens devem sair para que a porcentagem de homens na sala passe a ser 98%?

Exercício 27. Café com leite forte tem uma parte de leite e três partes de café. Café com leite fraco tem quatro partes de leite e uma parte de café. Determine com quantas partes de leite e quantas partes de café ficamos ao misturarmos volumes iguais do café com leite forte e do café com leite fraco.

Exercício 28. Num certo armazém, uma dúzia de ovos e 10 maçãs tinham o mesmo preço. Depois de uma semana, o preço dos ovos subiu 10% e o das maçãs caiu 2%. Quanto se gastará (em porcentagem) a mais na compra de uma dúzia de ovos e 10 maçãs?

Exercício 29. Joãozinho gastou a metade do dinheiro que tinha com um presente que comprou para a sua mãe. Em seguida, gastou 30% do que lhe restou, na compra de um jogo, e ainda ficou com $R\$ \ 63,00$. Quantos reais tinha Joãozinho antes das compras?

Exercício 30. Aumentando 2% o valor um número inteiro positivo, obtemos o seu sucessor. Qual é a soma desses dois números?

Exercício 31. Em um aquário há peixes amarelos e vermelhos: 90% são amarelos e 10% são vermelhos. Uma misteriosa doença matou muitos peixes amarelos, mas nenhum vermelho. Depois que a doença foi controlada, verificou-se que no aquário 75% dos peixes vivos eram amarelos. Aproximadamente, que porcentagem dos peixes amarelos morreram?

Exercício 32. Diamantino colocou em um recipiente três litros de água e um litro de suco composto de 20% de polpa e 80% de água. Depois de misturar tudo, que porcentagem do volume final é polpa?

Exercício 33. Na população de uma espécie rara de 1000 aves da floresta amazônica, 98% tinham cauda de cor verde. Após uma misteriosa epidemia que matou parte das aves com cauda verde, esta porcentagem caiu para 95%. Quantas aves foram eliminadas com a epidemia?

Exercício 34. Um colégio particular informa aos pais que a mensalidade paga até a data do vencimento tem um desconto de 8%, e a mensalidade paga com atraso tem um acréscimo de 8%. Se um pai paga a primeira mensalidade no vencimento e a segunda com atraso, o segundo pagamento teve, em relação ao primeiro, qual percentual de acréscimo?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 35. Durante os últimos dois anos uma fábrica reduziu sua produção de 51%. A cada ano a redução de produção foi pela mesma porcentagem. Qual o percentual de redução em cada ano?

Exercício 36. Numa festa, o número de pessoas que dançam é igual a 25% do número de pessoas que não dançam. Qual é a porcentagem do total de pessoas na festa que não dançam?

Exercício 37. Na cidade de Pulgacicaba alguns animais são realmente esquisitos. Dez por cento dos cães pensam que são gatos e dez por cento dos gatos pensam que são cães. Todos os outros animais são perfeitamente normais. Certo dia, todos os cães e gatos de Pulgacicaba foram testados por um psicólogo, verificando-se então que 20% deles pensavam que eram gatos. Que porcentagem dos animais eram realmente cães?

Exercício 38. Em uma festa, o número de mulheres era quatro vezes o número de homens. Após a chegada de cinco casais, a porcentagem de homens na festa passou a ser 26%.

a) Qual era o percentual de homens na festa antes da chegada dos casais?

b) Quantos homens e quantas mulheres havia na festa depois da chegada dos casais?

Exercício 39. Um feirante vende ovos brancos e vermelhos. Em janeiro de um determinado ano, do total de vendas realizadas, 50% foram de ovos brancos e os outros 50% de ovos vermelhos. Nos meses seguintes, o feirante constatou que, a cada mês, as vendas de ovos brancos reduziram-se 10% e as de ovos vermelhos aumentaram 20%, sempre em relação ao mês anterior. Ao final do mês de março desse mesmo ano, qual o percentual de vendas de ovos vermelhos, em relação ao número total de ovos vendidos em março?

Exercício 40. Um torneio de tênis foi disputado por n rapazes e $2n$ moças. Cada tenista jogou exatamente uma partida contra cada um dos outros tenistas. Se, ao final, 10% das partidas ocorreram entre rapazes, determine o valor de n.

Exercício 41. Um enfermeiro dispõe de um princípio ativo diluído em água em concentrações de 20% e 30%. Ele precisa de 100 ml do princípio ativo, diluído em água, e com concentração de 24%, a ser obtido misturando adequadamente quantidades do que ele dispõe. Quanto deve ser usado do composto com concentração de 20%?

Exercício 42. Uma empresa teve em três meses sucessivos um queda acumulada no seu faturamento de $27,1\%$. Se a perda média mensal se mantiver, de quanto será a queda acumulada do faturamento da empresa após o 4° mês?

Exercício 43. Gabriel resolveu uma prova de matemática com questões de álgebra, geometria e lógica. Após checar o resultado da prova Gabriel observou que respondeu corretamente 50% das questões de álgebra, 70% das questões de geometria e 80% das questões de lógica. Gabriel observou, também, que respondeu corretamente 62% das questões de álgebra e lógica e 74% das questões de geometria e lógica. Qual a porcentagem de questões corretas da prova de Gabriel?

Exercício 44. Lomonosov gasta um dinar por dia para comprar um pão e um copo de suco. Quando os preços subiram 20%, ele só pôde comprar meio pão e um copo de suco pelo mesmo dinar. Poderá um dinar pagar ao menos um copo de suco se o preço subir outra vez 20%?

Exercício 45. Em uma certa empresa, 10% dos empregados recebem 90% de todo o dinheiro gasto com salários. A empresa está dividida em departamentos. É possível que em cada departamento o dinheiro gasto com os salários de quaisquer 10% dos empregados seja no máximo 11% do dinheiro gasto com todos os salários pagos naquele departamento?

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1.

a) $0,04 = \frac{4}{100} = 4\%$

b) $0,23 = \frac{23}{100} = 23\%$

c) $0,8 = \frac{8}{10} = \frac{80}{100} = 80\%$

d) $0,562 = \frac{562}{1000} = \frac{56,2}{100} = 56,2\%$

2.

a) $4\% \cdot 1800 = 72.$

b) $36\% \cdot 75 = 27.$

c) $24,7\% \cdot 500 = 123,5.$

d) $4\% \cdot 1800 = 72.$

3.

a) 7% de $900 = 63.$

b) 36% de $25 = 9.$

c) 120% de $30 = 36.$

4. $a)12 \quad b)5,6 \quad c)13,5 \quad d)1$

5.

a) $(4\%)^2 = (\frac{4}{100})^2 = (\frac{16}{10000}) = (\frac{0,16}{100}) = 0,16\%.$

b) $\sqrt{64\%} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \frac{8}{10} = \frac{80}{100} = 80\%.$

c) $6\% \cdot 180 = \frac{6}{100} \cdot 180 = \frac{1080}{100} = 10,8.$

6. (Extraído e Adaptado da OBMEP)
As amostras que o gráfico expõe possuindo um percentual de álcool acima de 50% são as respostas para o exercício. Pelo gráfico, tratam-se das amostras 1, 2 e 3.

7. (Extraído do Vestibular da UNIMEP - Rio de Janeiro)

a) Primeira situação: aumento de 20% faz com que o novo preço seja 120% do inicial:

$$120\% \cdot R\$\ 300,00 = R\$\ 360,00.$$

b) Segunda situação: desconto de 20% sobre o novo preço faz com que este seja 80% do anterior:

$$80\% \cdot R\$\ 360,00 = R\$\ 288,00.$$

Portanto, o novo preço será de $R\$\ 288,00$.

8. Sejam h o número de meninos e m o número de meninas, ficando com $h+m$ como número de crianças. A partir do enunciado tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{h}{m} &= \frac{7}{3} \\ \frac{h}{m+h} &= \frac{7}{3+7} \\ &= 70\%. \end{aligned}$$

Portanto, o percentual de meninos é de 70%.

9. (Adaptado do vestibular da ACAFE SC - 2014)

Primeira solução: Seja x o valor inicial. Se a pessoa gastou 40% do que tinha, então ela ficou com 60% de x, logo:

$$\begin{aligned} 0,60 \cdot x &= 570 \\ x &= 570 \cdot \frac{100}{60} \\ x &= 950 \end{aligned}$$

Por fim, ela gastou $950 - 570 = 380$ reais.

Segunda solução: Sejam x o valor inicial e y os valor gasto. Utilizando a regra de três, temos:

$$\begin{aligned} \frac{60\%\ x}{570} &= \frac{40\%\ x}{y} \\ y &= \frac{570 \cdot 40}{60} \\ y &= 380. \end{aligned}$$

Por fim, ela gastou 380 reais.

10. (Extraído da OBMEP) Na primeira situação, cada grama custa $5,00/250 = R\$\ 0,02$ enquanto que na segunda, cada grama custa $5,00/200 = R\$\ 0,025$. Assim, estamos pagando a mais $R\$0,005$ por cada grama. Para sabermos que fração percentual esse acréscimo representa no preço anterior, basta efetuarmos a divisão:

$$\frac{0,005}{0,02} = \frac{25}{100} = 25\%.$$

Ou seja, com o novo preço, estamos pagando 25% a mais do que pagávamos anteriormente por cada grama.
Observação: Veja que o acréscimo percentual no preço vale para qualquer quantidade de gramas. Assim, outra maneira de resolver o problema seria comparar a variação de preços para um múltiplo comum das duas quantidades. Anteriormente, por um quilo pagávamos $R\$5,00 \times 4 = R\$\ 20,00$. Com o novo preço, o valor sobe para $R\$5,00 \times 5 = R\$\ 25,00$. A diferença de $R\$\ 5,00$ representa o aumento percentual de:

$$\frac{5}{20} = \frac{25}{100} = 25\%.$$

11. (Adaptado do vestibular da ACAFE SC - 2014)

Primeira Solução:
Se a mistura (x litros) deve ter 25% de água, então a tinta equivale 75% do total. Sendo assim,

$$\begin{aligned} 75\% \cdot x &= 840 \\ x &= 840 \cdot \frac{4}{3} \\ x &= 1120 \end{aligned}$$

Por fim, a quantidade de água é de $1120 - 840 = 280$ litros.

Segunda Solução:
Se a mistura deve ter 25% de água (x litros), então a tinta equivale 75% (840 litros) do total. Utilizando uma regra de 3, obtem-se que 25% está para x assim como 75% está para 840, daí:

$$\begin{aligned} \frac{25\%}{x} &= \frac{75\%}{840} \\ \frac{x}{25\%} &= \frac{840}{75\%} \\ \frac{x}{1} &= \frac{840}{3} \\ x &= 280. \end{aligned}$$

Por fim, a quantidade de água é de 280 litros.

12. (Extraído do Vestibular da UFU - Minas Gerais)

i) Porcentagem doada por A:

$$4\% \cdot 60\% = \frac{4}{100} \cdot \frac{60}{100} = \frac{240}{10000}.$$

ii) Porcentagem doada por B:

$$2\% \cdot 40\% = \frac{2}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{80}{10000}.$$

iii) Porcentagem resultante:

$$\frac{240}{10000} + \frac{80}{10000} = \frac{320}{10000} = \frac{3,2}{100} = 3,2\%.$$

13.

i) Um desconto de 20% faz com que fiquemos com 80% do valor inicial V:

$$80\% \cdot V = \frac{80}{100}V.$$

ii) Um desconto de 30% sobre o novo preço faz com que este seja 70% do anterior:

$$70\% \cdot 80\% \cdot V = \frac{70}{100} \cdot \frac{80}{100}V = \frac{56}{100}V = 56\% \cdot V.$$

Como só nos restou 56% do valor de V, os descontos sucessivos de 20% e 30% são equivalentes a um desconto de $100\% - 56\% = 44\%$.

14. (Extraído do Vestibular do CEFET - Ceará)

i) Um aumento de 25% faz com que fiquemos com 125% do valor inicial V, ou seja, $125\% \cdot V$.

ii) Um desconto de 25% sobre o novo preço faz com que este seja 75% do anterior, ou seja, $125\% \cdot 75\% \cdot V$

iii) Igualando ao valor dado:

$$\begin{aligned} 125\% \cdot 75\% \cdot V &= 225 \\ \frac{125}{100} \cdot \frac{75}{100} \cdot V &= 225 \\ V &= 225 \cdot \frac{100}{125} \cdot \frac{100}{75} \\ V &= 240. \end{aligned}$$

Portanto, $V = R\$240,00$.

15.

a) $1,47$

b) $0,31$

c) $1,5 \cdot 1,6 = 2,4$

d) $0,8 \cdot 0,9 = 0,72$

e) $1,8 \cdot 0,55 = 0,99$

16. Os fatores de variação serão $1,1$ e $1,2$ e o cálculo do fator global é feito por uma multiplicação e, como a ordem dos fatores não altera o produto, as duas situações são equivalentes, a saber:

$$1,1 \cdot 1,2 = 1,2 \cdot 1,1 = 1,32.$$

17. Um aumento de 15% gera um fator de variação de $1,15$. Logo, o novo preço será $1,15 \cdot 140 = R\$161,00$.

18. O fator de aumento será $(1 + i)$.

$$\begin{aligned} (1+i) \cdot 500 &= 800 \\ 1+i &= \frac{800}{500} \\ 1+i &= 1,6 \\ i &= 0,6 \end{aligned}$$

Portanto, 60% de aumento.

19. O fator de aumento a cada mês será $(1 + i)$ e como foram dois meses ficamos com $(1 + i)^2$.

$$\begin{aligned} (1+i)^2 \cdot 2000 &= 2420 \\ (1+i)^2 &= \frac{2420}{2000} \\ (1+i)^2 &= 1,21 \\ 1+i &= \sqrt{1,21} \\ 1+i &= 1,1 \\ i &= 0,1 \end{aligned}$$

Sendo assim, o percentual mensal foi de 10%.

2 Exercícios de Fixação

20. Inicialmente, deve-se calcular o novo valor ganho por hora de aula,

$$115\% \text{ de } 20 = 1,15 \cdot 20 = 23.$$

Agora basta calcular o total de horas trabalhadas no mês vezes o valor atual da hora/aula ficando com:

$$23 \cdot 22 \cdot 8 = 4048 \text{ reais.}$$

21. O fator de variação é $(1 + i)$, portanto

$$\begin{aligned} (1+i) \cdot 4 &= 3 \\ 1+i &= \frac{3}{4} \\ i &= 0,75 - 1 \\ i &= -0,25 \end{aligned}$$

Sendo assim, o percentual de desconto foi de 25%.

22. (Extraído do Clube de Matemática da OBMEP) Suponhamos que o preço original de venda de uma mercadoria fosse de $R\$ \ 120,00$. Na promoção, essa mercadoria valeria, então, $R\$ \ 60,00$. Se, para esta venda, a margem de lucro da loja é de 20% e o valor do produto é V, temos:

$$\begin{aligned} 60 &= V + 20\% \cdot V \\ &= 1,2V \end{aligned}$$

Consequentemente, $V = R\$ \ 50,00$. O lucro original então seria de $120,00 - 50,00 = R\$ \ 70,00$, o que representa a margem de lucro de $\frac{70}{50} = 140\%$ sobre o valor de custo da mercadoria.

Comentário para professores:. O valor arbitrário referência de $R\$ \ 120,00$ para venda não tira a generalidade da solução pois os resultados percentuais não mudam caso o valor de venda seja multiplicado por uma constante. A solução do caso geral é totalmente análoga trocando-se o valor de 120 por p arbitrário. É recomendável induzir os alunos a resolverem inicialmente o problema com valores particulares antes de abordar o caso geral.

23. A ideia aqui é pensar que o preço do produto não é $R\$ \ 1000,00$, pois esse valor só será feito no pagamento a prazo. Logo, o valor à vista é o preço real da mercadoria:

$$0,8 \cdot 1000 = 800.$$

Sendo assim, o juros será calculado utilizando o fator de variação $(1 + i)$.

$$\begin{aligned} (1+i) \cdot 800 &= 1000 \\ 1+i &= \frac{1000}{800} \\ 1+i &= 1,25 \\ i &= 0,25 \end{aligned}$$

Daí, a taxa de juros é de 25%.

24. Como o valor da compra é de $R\$ \ 1500,00$ e há um pagamento no ato da compra de $R\$ \ 900,00$, o comprador fica devendo a loja $1500 - 900 = 600$ reais. O fator de variação que torna o valor devido para 900 reais é de $(1+i)$, daí:

$$\begin{aligned} (1+i) \cdot 600 &= 900 \\ 1+i &= \frac{900}{600} \\ 1+i &= 1,5 \\ i &= 0,50 \end{aligned}$$

Daí, a taxa de aumento é de 50%.

25. Inicialmente deve-se estabelecer uma base comparativa para cálculo. O pote de 300 gramas, retirando a média do desperdício(10%), serve $0,90 \cdot 300 = 270$ gramas, ou seja, 9 cafés fortes. Para fazer essa quantidade com os sachês é preciso comprar 18 sachês, o que gera um custo de $18 \cdot 0,75 = 13,50$ reais. Portanto, é melhor comprar o pote. A economia é de $13,50 - 10,80 = 2,70$ que percentualmente fica de:

$$\frac{2,70}{13,50} = 0,20 = 20\%.$$

26. Na sala há 100 pessoas e como 99% são homens, há 99 homens e 1 mulher. Para que o número de homens se torne 98%, o número de mulheres deve virar 2%, ou seja 1 mulher vai equivaler a 2% do novo total "x" de pessoas. Sendo assim,

$$\begin{aligned} 2\% \text{ de } x &= 1 \\ \frac{2}{100} \cdot x &= 1 \\ x &= 50 \end{aligned}$$

Por fim, precisariam ficar 50 pessoas com 1 mulher, logo permaneceriam 49 homens e 50 precisariam sair da sala.

27. Para o café com leite forte tem-se $\frac{1}{4} = 25\%$ de leite e $\frac{3}{4} = 75\%$ de café. Para o café com leite fraco tem-se $\frac{4}{5} = 80\%$ de leite e $\frac{1}{5} = 20\%$ de café. Seja "v" o volume de cada café com leite antes da mistura. Sendo assim:

$$\begin{array}{rcl} \text{Café com leite forte} & = & \\ \text{Partes de Leite} & = & 0,25v \\ \text{Partes de Café} & = & 0,75v \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Café com leite forte:} & = & v \\ \text{Partes de Leite} & = & 0,80v \\ \text{Partes de Café} & = & 0,20v \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} \text{Mistura:} & = & 2v & & \\ \text{Partes de Leite} & = & 025v + 0,80v & = & 1,05v \\ \text{Partes de Café} & = & 075v + 0,20v & = & 0,95v \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{Partes de Leite}}{\text{Partes de Café}} &= \frac{1,05v}{0,95v} \\ &= \frac{105v}{95v} \\ &= \frac{21}{19} \end{aligned}$$

Ficamos então com 21 partes de leite para 19 partes de café.

28. (Extraído da OBMEP)
Seja V o preço da dúzia de ovos que coincide com o preço da dezena de maçãs. Com a subida de 10% no preço dos ovos, a dúzia passará a custar $V + 10\%V = 1,1V$. Com a queda de 2% no preço das maçãs, elas passarão a custar $V - 2\%V = 0,98V$. Daí, antes o preço da compra pedida era $2V$ e agora passou para $2,08V$. Tivemos assim um aumento de $0,08$ que corresponde ao aumento percentual de:

$$\frac{0,08V}{2V} = 0,04 = \frac{4}{100} = 4\%.$$

Observação: Perceba que poderíamos ter atribuído um valor arbitrário para V e a resposta seria a mesma pois o percentual não se altera quando multiplicamos os valores por uma mesma constante.

29. Seja x a quantidade inicial de dinheiro do Joãozinho.

i) Após comprar o presente para a mãe, Joãozinho ficou com $\frac{x}{2}$.

ii) Após gastar 30% do que sobrou, ele ficou com

$$70\% \cdot \frac{x}{2} = \frac{70x}{200}.$$

Portanto, $\frac{70x}{200} = 63$ e $x = R\$\ 180,00$.

30. (Extraído da OBM)
Como o aumento de 2% de um número x corresponde à 1, temos $\frac{2x}{100} = 1$ e $x = 50$. Portanto, seu sucessor é 51 e a soma de ambos é 101.

31. (Extraído da OBM)
Seja 100 a quantidade de peixes no aquário. Se A e V denotam as quantidades de peixes amarelos e vermelhos, temos $A = 90$ e $V = 10$. Se após a morte de x peixes amarelos eles ainda constituíam 75% dos peixes restantes, temos

$$90 - x = \frac{75}{100}(100 - x),$$

ou seja, $x = 60$. Se morreram 60 dos 90 peixes amarelos, a mortandade foi de

$$\frac{60}{90} = \frac{2}{3} = 0,666... = \frac{66,\overline{6}}{100},$$

ou seja, aproximadamente 67%.

32. (Extraído da OBM)
A mistura final tem $0,2$ litros de polpa e $3+0,8 = 3,8$ litros de água. A porcentagem de polpa em relação ao volume da mistura é $\frac{0,2}{4} = \frac{2}{40} = 0,05 = 5\%$.

33. (Extraído da OBM)
Inicialmente existiam 980 aves com a cauda verde e 20 das demais. Após a epidemia, estas 20 aves correspondem a 5%, donde o total de aves agora é $20 \times 20 = 400$ (sendo 380 da cauda verde). Portanto, morreram 600 aves.

34. (Adaptado do vestibular da ACAFE SC - 2014)
Seja x o valor da mensalidade sem desconto e sem acréscimo. O valor pago com 8% de desconto fica $0,92x$ e o valor pago com 8% de acréscimo fica $1,08x$. Portanto o percentual do segundo pagamento em relação ao primeiro pode ser calculado por $\frac{1,08}{0,92} = 1,1739....$ O percentual de acréscimo fica em torno de $17,39\%$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

35. (Extraído da Olimpíada de Matemática da Rússia)
Se houve uma redução de 51% então a produção atual é de 49%. Como o fator de variação do bimestre foi $(1+i)^2$, temos:

$$\begin{aligned} (1+i)^2 &= 0,49 \\ 1+i &= \sqrt{\frac{49}{100}} \\ 1+i &= \frac{7}{10} \\ i &= -0,3 \end{aligned}$$

Redução mensal de 30%.

36. (Extraído da OBM)
Sejam x e y os números de pessoas que dançam e que não dançam, respectivamente. Como $x = \frac{25}{100} \cdot y$, temos $y = 4x$. Portanto, a porcentagem do número de pessoas que não dançam é:

$$\frac{y}{x+y} = \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5} = \frac{80}{100} = 80\%.$$

37. (Extraído dos Clubes de Matemática da OBMEP)
Sejam c o número de cães e g o número de gatos. Tem-se:

$$\begin{aligned} 10\% \text{ de } c + 90\% \text{ de } g &= 20\% \text{ de } (c+g) \\ 0,10c + 0,90g &= 0,20c + 0,20g \\ c + 9g &= 2c + 2g \\ 7g &= c \\ c &= 7g \end{aligned}$$

Por fim, $\dfrac{\text{Cães}}{\text{Total}} = \dfrac{c}{c+g} = \dfrac{7g}{7g+g} = \dfrac{7}{8} = 87,5\%$.

38. (Extraído da OBMEP)

a) Sejam m o número de mulheres e h o número de homens antes da chegada dos cinco casais. Como o número de mulheres era quatro vezes o número dos homens, temos:

$$m = 4h.$$

Deste modo, a fração de homens pelo total de pessoas presentas antes da chegada dos cinco casais era:

$$\frac{h}{h+m} = \frac{h}{h+4h} = \frac{h}{5h} = \frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 20\%$$

b) Após a chegada dos cinco casais, ficamos com $h+5$ homens e $m+5$ mulheres. Assim, o novo percentual de homens é:

$$\frac{h+5}{h+5+m+5} = \frac{h+5}{h+4h+10} = \frac{h+5}{5h+10}.$$

Fazendo $\dfrac{h+5}{5h+10} = \dfrac{26}{100}$, temos $h = 8$. Consequentemente $m = 4h = 32$ e após a chegada dos cinco casais teremos $8+5 = 13$ homens e $32+5 = 37$ mulheres.

39. (Extraído do Vestibular da UERJ 2014)
Tomando como base o total de ovos como 1000, dividindo-se igualmente 500 para cada cor de ovo pode-se analisar a passagem dos meses (de janeiro para fevereiro e fevereiro para março) pelo fator de variação $(1+i)^2$, com $i = -10\%$ para os brancos e $i = 20\%$ para os vermelhos.

$$\begin{aligned} \text{Ovos Brancos} &= (1-0,1)^2 \cdot 500 \\ \text{Ovos Brancos} &= 405 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ovos Vermelhos} &= (1+0,2)^2 \cdot 50 \\ \text{Ovos Vermelhos} &= 720 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{Ovos Vermelhos}}{\text{Total de Ovos}} &= \frac{720}{405+720} \\ &= \frac{720}{1125} \\ &= 0,64. \end{aligned}$$

Portanto, 64%.

40. (Extraído do exame de acesso do PROFMAT)
Basta observar que há $3n$ pessoas e total[1] de partidas disputas por homens é $\dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$ e o total de partidas é $\dfrac{3n \cdot (3n-1)}{2}$. Agora, como as partidas entre os homens representam 10% do total, segue:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}{\frac{3n \cdot (3n-1)}{2}} &= \frac{10}{100} \\ \frac{n \cdot (n-1)}{3n \cdot (3n-1)} &= \frac{1}{10} \\ \frac{(n-1)}{3 \cdot (3n-1)} &= \frac{1}{10} \\ 10n - 10 &= 9n - 3 \\ n &= 7 \end{aligned}$$

41. (Extraído do vestibular da FPS PE - 2014)
Seja x a quantidade de água com princípio ativo em concentração de 20%, o que resulta em $0,20x$ do princípio ativo. Como é preciso 100 ml, a quantidade de composto em concentração de 30% será $(100 - x)$, o que resulta em $0,30(100 - x)$ de princípio ativo. Como deseja-se um composto de 100 ml com concentração de 24%, fica-se com $0,24 \cdot 100 = 24$ ml do princípio ativo. Portanto,

$$\begin{aligned} 0,2x + 0,3(100 - x) &= 0,24 \cdot 100 \\ 0,2x - 0,3x + 30 &= 24 \\ -0,1x &= -6 \\ x &= 60 \end{aligned}$$

Resposta: 60 ml do composto com concentração de 20%.

[1] Entre k objetos, existem $\dfrac{k(k-1)}{2}$ subconjuntos de dois elementos. Para ver isso, basta usar o princípio multiplicativo e notar que dentre as $k(k-1)$ maneiras de escolhermos dois objetos distintos, cada subconjunto de dois elementos foi representado duas vezes.

42. Se forem três meses de variação teremos que três vezes incidiu o fator de variação de $(1+i)$, ou seja, no acumulado $(1+i)^3$.Se houve queda de $27,1\%$, então o faturamento atual é $72,9\%$ do inicial. Sendo assim,

$$\begin{aligned} (1+i)^3 \cdot 100\% &= 72,9\% \\ (1+i)^3 &= \frac{72,9}{100} \\ (1+i)^3 &= \frac{729}{1000} \\ 1+i &= \sqrt[3]{\frac{729}{1000}} \\ i &= \frac{9}{10} - 1 \\ i &= -0,1 \\ i &= -10\%. \end{aligned}$$

A cada mês houve uma perda média de 10%. Para o 4° mês de queda basta calcularmos o fator $1 - i = 1 - 0,1 = 0,9$ com o faturamento atual (3° mês), que perfaz

$$0,9 \cdot 0,729 = 0,6561 = 65,61\%.$$

Por fim, o faturamento ficou $1 - 65,61\% = 34,39\%$ menor após o 4° mês.

43. (Extraído da OBM)
Sejam A, G e L as quantidades de questões de álgebra, geometria e lógica. Sabendo que ele acertou $70\% \cdot G$ e $80\% \cdot L$ questões de geometria e lógica, respectivamente, o percentual de questões respondidas corretamente incluindo esses dois assuntos é $\dfrac{0,7G + 0,8L}{G + L}$. Como o percentual anterior deve ser igual a 74%, temos:

$$\begin{aligned} \frac{0,7G + 0,8L}{G + L} &= \frac{74}{100} \\ 0,04G &= 0,06L \\ G &= \frac{3L}{2}. \end{aligned}$$

Da mesma forma, como ele acertou $50\% \cdot A$ questões de álgebra, também podemos escrevver:

$$\begin{aligned} \frac{0,5A + 0,8L}{A + L} &= \frac{62}{100} \\ 18L &= 12A \\ A &= \frac{3L}{2}. \end{aligned}$$

A porcentagem de questões respondidas corretamente é:

$$\begin{aligned} \frac{0,5A + 0,7G + 0,8L}{A + G + L} &= \frac{0,5 \cdot \frac{3}{2}L + 0,7 \cdot \frac{3}{2}L + 0,8L}{\frac{3}{2}L + \frac{3}{2}L + L} \\ &= \frac{2,6}{4} \\ &= 65\%. \end{aligned}$$

44. (Adaptado da Olimpíada de Matemática da Rússia)
Sejam p e s os preços iniciais do pão e do copo de suco, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} p + s &= 1 \\ p &= 1 - s \end{aligned}$$

Após a primeira inflação os preços se tornam:

$$\begin{aligned} 1,2 \cdot \frac{p}{2} + 1,2s &= 1 \\ 0,6p + 1,2s &= 1 \\ 0,6(1-s) + 1,2s &= 1 \\ 0,6 - 0,6s + 1,2s &= 1 \\ 0,6s &= 0,4 \\ 6s &= 4 \\ s &= \frac{4}{6} \\ s &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

O preço do suco após a segunda inflação ficará:

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{3} \cdot (1,2)^2 \\ s &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{12}{10}\right)^2 \\ s &= \frac{2}{3} \cdot \frac{144}{100} \\ s &= \frac{288}{300} \quad < \quad 1. \end{aligned}$$

Logo, é possível que Lomonosov possa comprar ao menos um copo de suco com um dinar.

45. Sim, é possível. Considere uma empresa com 100 funcionários e consistindo apenas de dois departamentos: um com 10 funcionários que recebem 90% de todos os salários e outro com 90 funcionários recebendo os 10% restantes. Em cada departamento, distribua salários iguais para todos os funcionários. Em cada departamento, quaisquer 10% dos funcionários ganham exatamente $10\% < 11\%$ do dinheiro gasto com salários em tal departamento.

PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM