

Módulo de Leis dos Senos e dos Cossenos

Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo.

1ª série E.M.



Trigonometria

Razões trigonométricas no triângulo retângulo.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. A Recíproca do Teorema de Pitágoras, enuncia que:

“se as medidas dos três lados de um triângulo qualquer satisfazem a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$, então esse triângulo é retângulo”.

Dentre os ternos (a, b, c) de números inteiros listados, com $a < b < c$, qual(is) dele(s) poderiam ser lados de triângulo(s) retângulo(s)?

- a) (5, 12, 13).
- b) (8, 15, 17).
- c) (7, 24, 25).
- d) (12, 35, 37).
- e) (11, 60, 61).
- f) (20, 21, 29).
- g) (9, 40, 41).

Exercício 2. Dentre os ângulos agudos dos triângulos retângulos do exercício 1 qual possui o maior seno?

Exercício 3. Quais os senos, cossenos e tangentes dos ângulos agudos do triângulo de lados 6 cm, 8 cm e 10 cm?

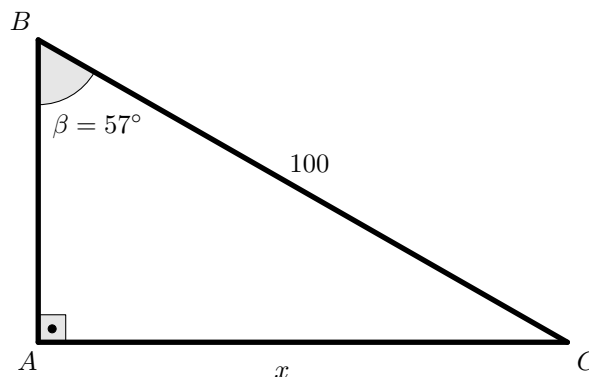
Exercício 4. Um triângulo tem lados medindo 3 cm, 4 cm e 5 cm. Outro triângulo tem lados medindo 9 cm, 12 cm e 15 cm. Os ângulos desses triângulos são iguais?

Exercício 5. Utilizando os dados aproximados da tabela 2, calcule o que se pede.

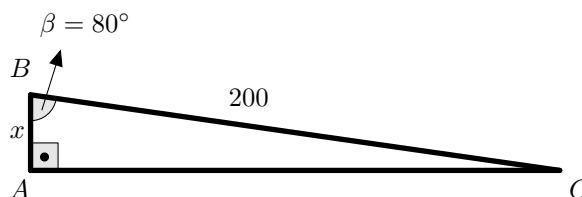
Tabela 2: Senos, cossenos e tangentes.

Arco	sen	cos	tg
15°	0,26	0,97	0,27
20°	0,34	0,93	0,37
30°	0,5	0,87	0,58
40°	0,64	0,77	0,84
57°	0,84	0,54	1,54
80°	0,98	0,17	5,67

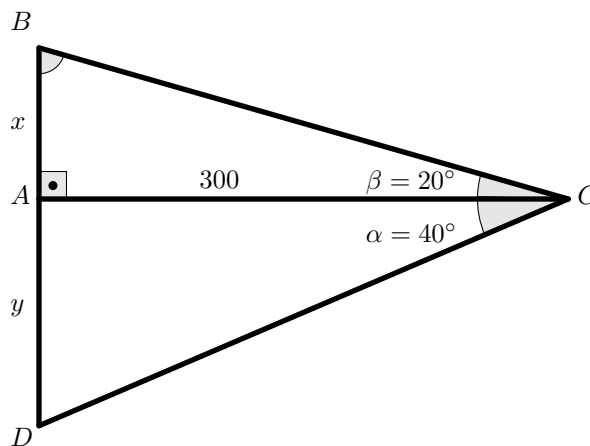
a) Determine valor de $AC = x$.



b) Determine valor de $AB = x$.



c) Determine valor de $BD = x + y$.



- d) Seja o $\triangle ABC$, retângulo em B , com $B\hat{A}C = 15^\circ$ e $D \in AB$ tal que $A\hat{D}C = 150^\circ$. Sendo $DB = 400$ cm, qual o valor de AC ?
- e) Um triângulo retângulo possui catetos medindo 34 e 93, qual a medida aproximada do ângulo oposto ao cateto de menor medida?
- f) Um triângulo retângulo possui catetos medindo 26 e 97. Qual a medida aproximada do ângulo oposto ao cateto de maior medida?
- g) Num triângulo retângulo com um ângulo medindo 30° , prove que o seu cateto oposto é metade da hipotenusa.

Exercício 6. No triângulo da figura 2 calcule os valores dos senos, cossenos e tangentes de α e β .

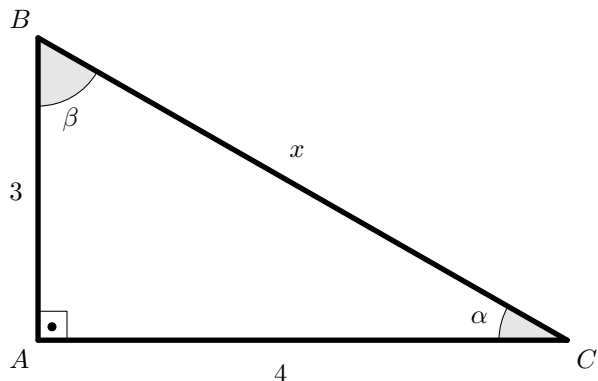


Figura 2

Exercício 7. Sendo $0 < \alpha < 90^\circ$ e $\text{sen } \alpha = 0,6$. Quais os valores do cosseno e da tangente de α ?

Exercício 8. Definindo a $\text{sec } x = \frac{1}{\cos x}$, demonstre, a partir da relação fundamental da trigonometria, que

$$\text{tg}^2 x + 1 = \text{sec}^2 x.$$

Exercício 9. A figura 3 representa um $\triangle ABC$, equilátero, com lado medido 2 cm e uma altura BH .

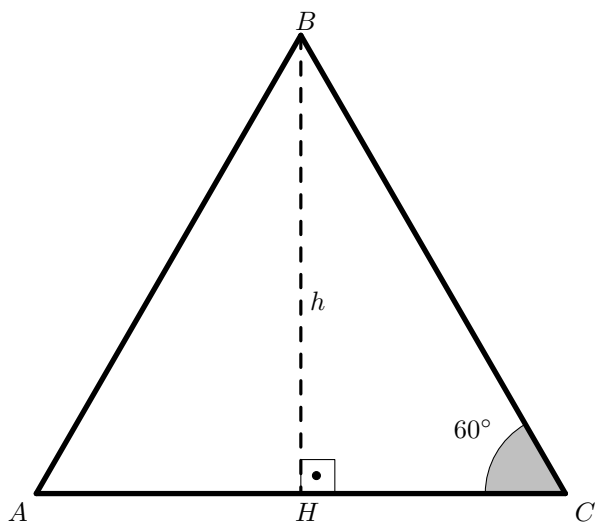


Figura 3

Quais os valores do(a):

- $\text{sen } 60^\circ$, $\text{cos } 60^\circ$ e $\text{tg } 60^\circ$?
- $\text{sen } 30^\circ$, $\text{cos } 30^\circ$ e $\text{tg } 30^\circ$?

Exercício 10. A partir de um quadrado de lado medindo 1 cm, determine as medidas dos seno, cosseno e da tangente de 45° .

Exercício 11. Sendo α um ângulo agudo num triângulo retângulo qualquer, prove que

$$\text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \alpha \cdot \text{tg } \alpha = \text{sen}^2 \alpha.$$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 12. Sobre uma rampa de 6 m de comprimento e inclinação de 30° com a horizontal, devem-se construir degraus de altura 25 cm. Quantos degraus desse tipo serão construídos?

Exercício 13. Um observador está em um ponto A do aterro do Flamengo e vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 10° com o plano horizontal (medido com o teodolito). Ele anda em direção ao seu objetivo até um ponto B distante 650 m de A e agora vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 14° . Qual é a altura do Pão de Açúcar em relação ao plano de observação?

Dados: $\text{tg } 10^\circ = 0,1763$ e $\text{tg } 14^\circ = 0,2493$.

Exercício 14. Ao atender o chamado de um incêndio em um edifício, o corpo de bombeiros de uma cidade utilizou um veículo de combate a incêndio, dotado de escada magirus. Esse veículo possibilita atender a resgates a uma altura máxima de 54 metros, utilizando um ângulo máximo de levantamento de 60° .

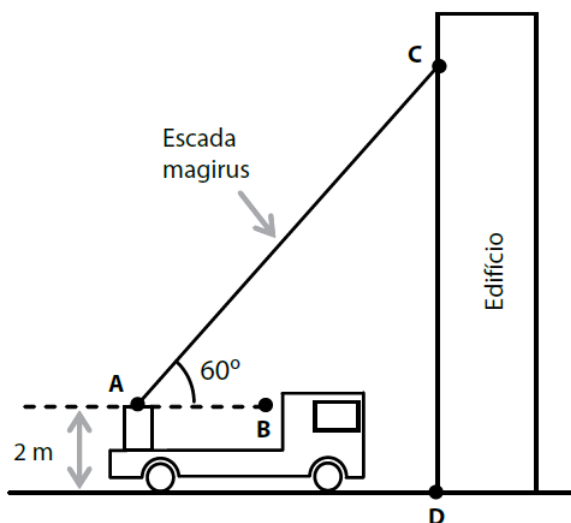


Figura 8

- Qual o comprimento dessa escada quando totalmente esticada?
- Houve um problema e o ângulo de levantamento foi reduzido em 25%. Qual a nova altura máxima alcançada?

Exercício 15. Seja x um número real positivo tal que

$$\text{sec } x - \text{tg } x = 1.$$

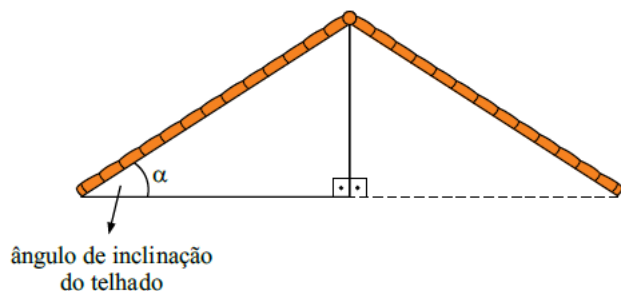
Calcule $\text{sec } x + \text{tg } x$.

Exercício 16. No triângulo ABC ,

$$3 \text{ sen } A + 4 \text{ cos } B = 6 \quad \text{e} \quad 4 \text{ sen } B + 3 \text{ cos } A = 1$$

Encontre a medida do ângulo C .

Exercício 17. A inclinação de um telhado é determinada pela porcentagem da medida do cateto oposto ao ângulo de inclinação (cateto na vertical) em relação à medida do cateto adjacente a esse ângulo (cateto na horizontal), em um triângulo retângulo associado a esse telhado.



α	$\text{sen } \alpha$	$\text{cos } \alpha$	$\text{tg } \alpha$
5°	0,08716	0,99619	0,08749
$5,5^\circ$	0,09585	0,99540	0,09629
6°	0,10453	0,99452	0,10510
9°	0,15643	0,98769	0,15838
$9,5^\circ$	0,16505	0,98629	0,16734
18°	0,30902	0,95106	0,32492

Figura 9

É correto concluir que, em um telhado com 9,5% de inclinação, o ângulo α está entre quais valores da tabela?

Exercício 18. Demonstre que a área S do $\triangle ABC$ (figura 10) pode ser calculada pela fórmula $S = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen } \alpha}{2}$.

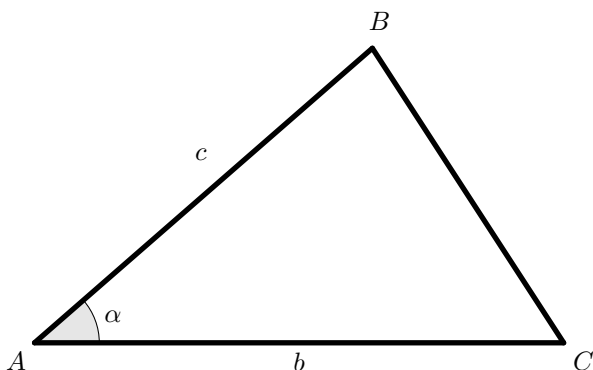


Figura 10

Exercício 19. No $\triangle ABC$ temos que $AB = \sqrt{2}$ cm, $AC = 6$ cm e $\hat{BAC} = 45^\circ$, qual o valor da sua área?

Exercício 20. Percorrendo, ao longo de uma reta horizontal, a distância $d = AB$, em direção à base inacessível de um poste CD , nota-se (com o auxílio de um teodolito) que os ângulos \hat{CAD} e \hat{CBD} medem, respectivamente, α e β graus. Qual é a altura do poste CD ?

Exercício 21. No triângulo da figura 12, qual a razão entre as áreas S_1 e S_2 ?

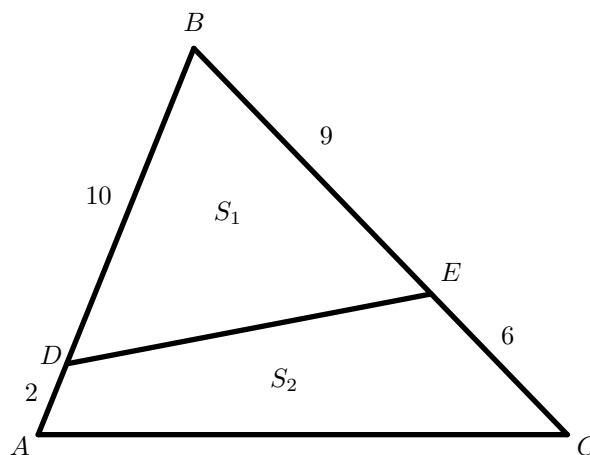


Figura 12

Exercício 22. Um enigma interessante ocorre quando movimentamos as “peças” da figura 13 e criamos a figura 14. Com as mesmas peças reordenadas, surge um quadradinho vazio na base. Explique esse fato.

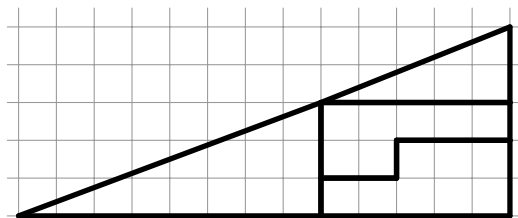


Figura 13

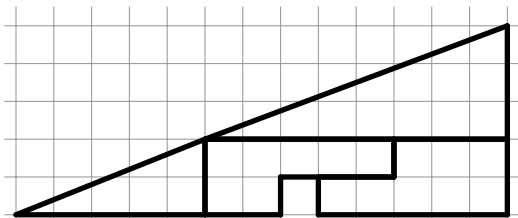


Figura 14

Exercício 23. A Torre Eiffel tem 324 m da altura (contando com a antena), e deseja-se fotografá-la completamente usando uma câmera com lente de abertura de 40° . Qual a mínima distância da torre (no plano da sua base) para que uma foto com essa câmera capture a torre inteira, como ilustra a figura 15? (Dados na tabela 2.)

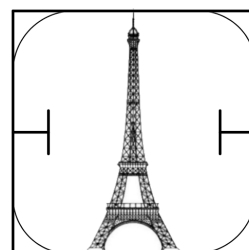


Figura 15

Exercício 24. Na figura 17 temos o $\triangle ABC$ com a altura $AH = 1$ cm.

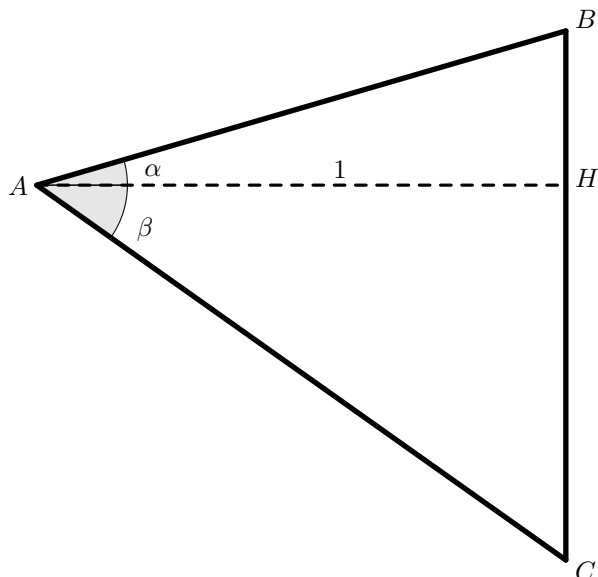


Figura 17

Sendo assim, calcule:

- em função do ângulo α , o valor de AB .
- em função do ângulo α , o valor de HB .
- em função do ângulo β , o valor de AC .
- em função do ângulo β , o valor de HC .
- a área de $\triangle ABC$, em função de BC e da altura AH .
- a área de $\triangle ABC$ utilizando a fórmula do exercício 18.
- uma fórmula para o $\text{sen}(\alpha + \beta)$ a partir dos resultados dos itens e e f.

Exercício 25. A partir da análise da figura 18, demonstre que $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen} \alpha \text{sen} \beta$.

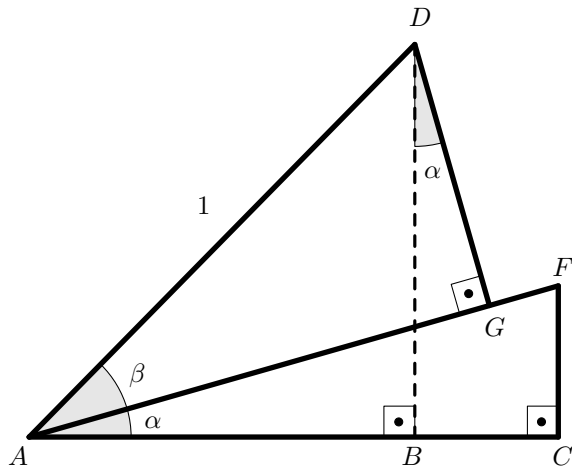


Figura 18

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 26. Num triângulo retângulo a hipotenusa mede 13 cm e um dos catetos mede 5 cm. A soma das tangentes dos ângulos agudos é aproximadamente:

- 1.
- 1,3.
- 2.
- 2,5.
- 2,8.

Exercício 27. Para calcular a altura de um morro, um topógrafo posicionou-se com seu teodolito a 200 m do morro e o aparelho forneceu a medida do ângulo de visada do morro: 30° . O topógrafo, olhando numa tabela, considerou $\text{tg} 30^\circ = 0,57$. Se a altura do teodolito é 1,60 m, qual é a altura, em metros, do morro obtida pelo topógrafo?

- 352,48.
- 125,60.
- 118,20.
- 115,60.
- 114.

Exercício 28. Na figura 20, estão assinalados três ângulos retos, e três ângulos de medida α . Sendo $AB = 1$ e $BC = 5$, o valor de $\cos \alpha$ é

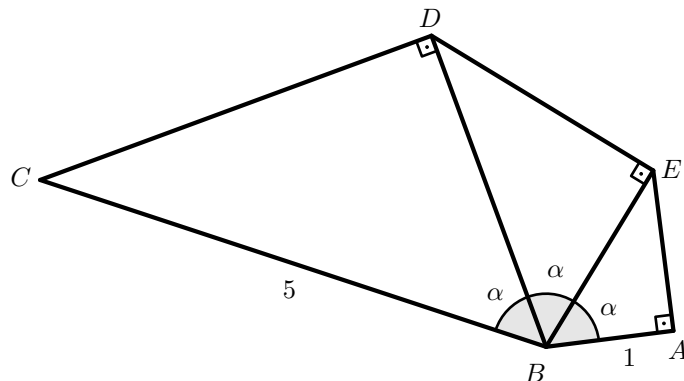


Figura 20

- $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$.
- $\frac{1}{\sqrt{5}}$.
- $\sqrt[3]{5}$.
- $\frac{1}{5}$.

Exercício 29. Um avião voava a uma altitude e velocidade constantes. Num certo instante, quando estava a 8 km de distância de um ponto P , no solo, ele podia ser visto sob um ângulo de elevação de 60° e, dois minutos mais tarde, esse ângulo passou a valer 30° , conforme a figura 21. A velocidade, em km/h, desse avião era de:

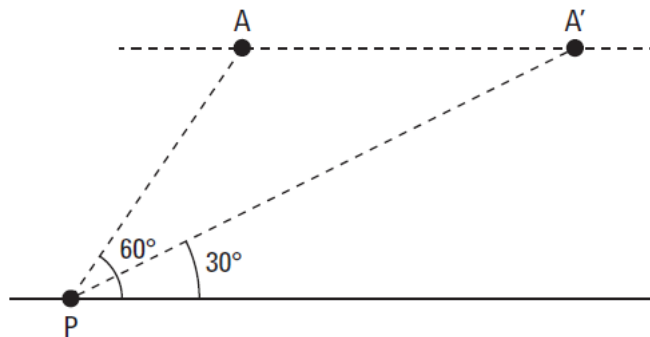


Figura 21

- 180.
- 240.
- 120.
- 150.
- 200.

Exercício 30. Prove que:

- a) $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$.
 b) $\sin x = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.
 c) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
 d) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
 e) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
 f) $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$
 g) $\sin(2x) = 1 - 2\sin^2 x$
 h) $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cos x + 1}{2}}$

Exercício 31. Seja $0 < x < 90^\circ$ tal que

$$(1 + \operatorname{tg}^2 x) \cos x = 2.$$

Qual o valor de $\cos(2x)$?

Exercício 32. Utilizando as fórmulas de somas de arcos, prove que:

- a) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$.
 b) $(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 44^\circ) = 2$.
 c) se $\alpha + \beta = 45^\circ$, então $(1 + \operatorname{tg} \alpha^\circ)(1 + \operatorname{tg} \beta^\circ) = 2$.
 d) $(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 2^\circ) \dots (1 + \operatorname{tg} 44^\circ)$ é quadrado perfeito.

Exercício 33. Faça o que se pede.

a) Calcule uma expressão equivalente a

$$\frac{\operatorname{sen} 1^\circ}{\cos k^\circ \cdot \cos(k+1)^\circ}.$$

b) Prove que

$$\frac{\operatorname{sen} 1^\circ}{\cos 0^\circ \cdot \cos 1^\circ} + \frac{\operatorname{sen} 1^\circ}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ} + \dots + \frac{\operatorname{sen} 1^\circ}{\cos 2014^\circ \cdot \cos 2015^\circ}$$

é igual a $\operatorname{tg} 2015^\circ$.

Exercício 34. Resolva os itens abaixo:

- a) Prove que $(\operatorname{sen} 1^\circ) \cdot (\operatorname{sen} 89^\circ) = \frac{(\operatorname{sen} 2^\circ)}{2}$.
 b) Prove que $(\operatorname{sen} 2^\circ) \cdot (\operatorname{sen} 88^\circ) = \frac{(\operatorname{sen} 4^\circ)}{2}$.
 c) Sabendo que

$$(\operatorname{sen} 1^\circ)(\operatorname{sen} 3^\circ)(\operatorname{sen} 5^\circ) \dots (\operatorname{sen} 87^\circ)(\operatorname{sen} 89^\circ) = \frac{1}{2^n},$$

qual o valor de n ?

Exercício 35. Leia as proposições abaixo e depois desenvolva o que se pede.

Proposição 1. Para o $\triangle ABC$, com ceviana⁴ BD , é válido que

$$\frac{(ABD)}{(CBD)} = \frac{AD}{CD},$$

onde (ABD) e (CBD) representam as áreas de $\triangle ABD$ e $\triangle CBD$.⁵

Proposição 2. Para o $\triangle ABC$, bissetriz BD , $D \in AC$, é válido que

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{CB}.$$

Desenvolva uma demonstração da proposição 2 utilizando a proposição 1 e a fórmula demonstrada no exercício 18.

Exercício 36. A partir do triângulo da figura 24 calcule:

- a) $\sin 18^\circ$ e $\cos 18^\circ$. c) $\sin 36^\circ$ e $\cos 36^\circ$.
 b) $\sin 72^\circ$ e $\cos 72^\circ$. d) $\sin 54^\circ$ e $\cos 54^\circ$.

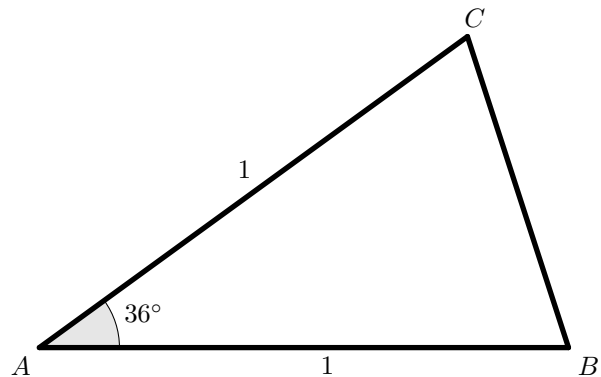


Figura 24

Exercício 37. A partir das fórmulas do cosseno da soma e do cosseno da diferença, prove que:

- a) $\cos(a+b) - \cos(a-b) = 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$.
 b) $\cos 1^\circ - \cos 45^\circ = 2 \cdot \operatorname{sen} 23^\circ \cdot \operatorname{sen} 22^\circ$.
 c) $1 - \operatorname{cotg} 23^\circ = \frac{2}{1 - \operatorname{cotg} 22^\circ}$.

Exercício 38. No retângulo $ABCD$, com um ponto E em AB , um ponto F em BC , $DF = 1$ u.c., sendo $D\hat{E}F$ reto, $A\hat{D}E = \alpha$ e $E\hat{D}F = \beta$, calcule.

- a) Qual ângulo representa $\alpha + \beta$?
 b) Desenvolva outra demonstração para o $\cos(\alpha + \beta)$?

⁴Ceviana é qualquer segmento de reta num triângulo com uma extremidade no vértice do triângulo e a outra extremidade no lado oposto, no caso $D \in AC$.

⁵Demonstração imediata pela fórmula de área de um triângulo.

Exercício 39. O retângulo $ABCD$ foi dividido em três quadrados de lado 1 cm. Prove que

$$B\hat{H}C = B\hat{D}C + B\hat{G}C.$$

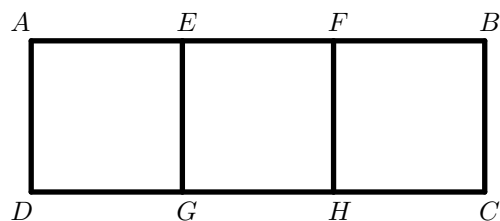


Figura 28

Exercício 40.

a) Prove que $\text{sen}(2x) = \frac{2 \text{tg } x}{1 + \text{tg}^2 x}$.

b) Prove que $\text{cos } x = \frac{1 - \text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x}$.

c) Se $\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ é um número racional ($\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$), prove que $\text{cos } \alpha$ e $\text{sen } \alpha$ são números racionais.

d) Prove que $\text{tg } x = \text{cossec}(2x) - \text{cotg}(2x)$.

e) Reciprocamente, se $\text{cos } \alpha$ e $\text{sen } \alpha$ são números racionais, prove que $\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ é número racional.

Exercício 41. Um holofote está situado no ponto A , a 30 metros de altura, no alto de uma torre perpendicular ao plano do chão. Ele ilumina, em movimento de vaivém, uma parte desse chão, do ponto C ao ponto D , alinhados à base B , conforme demonstra a figura 30 abaixo:

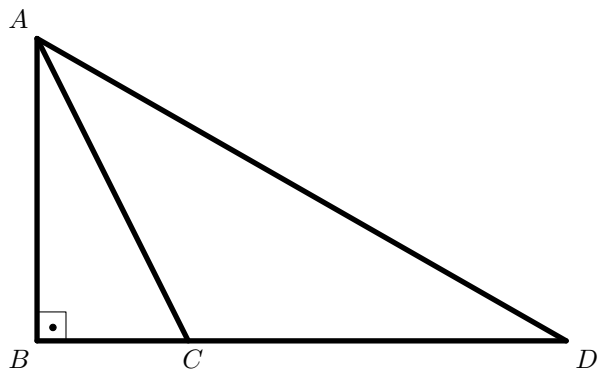


Figura 30

Se o ponto B dista 20 metros de C e 150 metros de D , a medida do ângulo $C\hat{A}D$ corresponde a:

- a) 60° b) 45° c) 30° d) 15°

Exercício 42. Sendo $\text{sen } x + \text{cos } x = \sqrt{2}$, qual o valor de $\text{sen}(2x)$?

Exercício 43. A partir da figura 31, deduza as fórmulas

a) $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \text{cos } \beta - \text{sen } \beta \text{cos } \alpha$; e

b) $\text{cos}(\alpha - \beta) = \text{cos } \alpha \text{cos } \beta + \text{sen } \alpha \text{sen } \beta$.

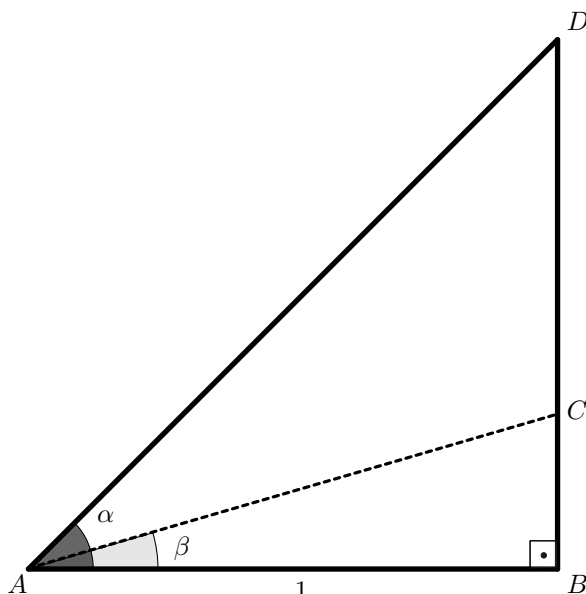


Figura 31

Exercício 44. Sendo x e y números reais tais que

$$(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 14.$$

Qual o valor mínimo de $x^2 + y^2$?

- a) 2. b) 1. c) $\sqrt{3}$. d) $\sqrt{2}$.

Exercício 45. Usando as fórmulas das questões 24 e 25, resolva os itens a seguir.

a) Verifique que $(1 + \text{tg } k)(1 + \text{tg}(45^\circ - k)) = 2$.

b) Dado que

$$(1 + \text{tg } 1^\circ)(1 + \text{tg } 2^\circ) \cdot \dots \cdot (1 + \text{tg } 45^\circ) = 2^n,$$

calcule n .

Respostas e Soluções.

Observação: Nesse módulo serão estudadas as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Aplicaremos os conceitos de cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa para definir os senos, cossenos e tangentes de cada ângulo. No geral, fazendo uso das marcações no triângulo da figura 1, teremos:

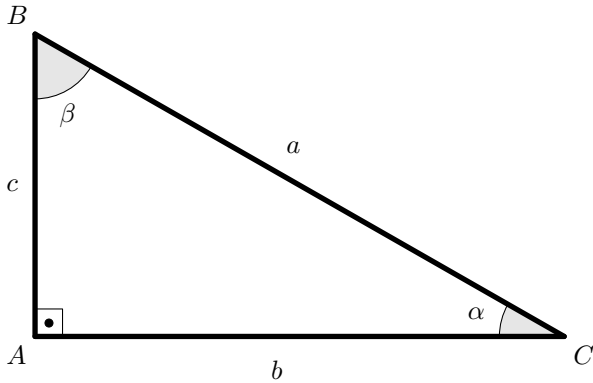


Figura 1

- i) os catetos são b e c e a hipotenusa é a ;
- ii) em relação ao ângulo α , teremos c como cateto oposto e b como cateto adjacente (o inverso para β);
- iii) definiremos o $\text{sen } \alpha = \frac{c}{a}$ e o $\text{sen } \beta = \frac{b}{a}$;
- iv) definiremos o $\text{cos } \alpha = \frac{b}{a}$ e o $\text{cos } \beta = \frac{c}{a}$; e
- v) definiremos a $\text{tg } \alpha = \frac{c}{b}$ e $\text{tg } \beta = \frac{b}{c}$.

O que permite concluir que quando α e β forem complementares, isto é,

$$\alpha + \beta = 90^\circ,$$

teremos $\text{sen } \alpha = \text{cos } \beta$ e $\text{sen } \beta = \text{cos } \alpha$. Usando as substituições adequadas concluímos que $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$ e $\text{tg } \beta = \frac{\text{sen } \beta}{\text{cos } \beta}$. Além disso, aplicando o Teorema de Pitágoras poderemos concluir, para ângulos agudos, que

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1.$$

Com o avanço da teoria será demonstrado que essa será a “**Relação Fundamental**” e é válida para qualquer ângulo, não necessariamente agudo. Ademais, conclui-se ainda que

$$\text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta = 1.$$

Outras funções trigonométricas importantes são $\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$, $\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}$ e $\text{cossec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$.

1. Observe que todos os ternos satisfazem a Recíproca do Teorema de Pitágoras, portanto, todos poderiam ser lados em triângulos retângulos. Os dois números menores representariam as medidas dos catetos e o maior número, a medida da hipotenusa.

2. Em cada um dos triângulos retângulos da questão anterior há dois ângulos agudos. Definindo o $\text{sen } i = \frac{\text{Cateto Oposto } i}{\text{Hipotenusa}}$, $i \in \{1, 2\}$, e calculando os respectivos valores, obtemos os resultados aproximados da tabela 1.

Tabela 1: Senos, cossenos e tangentes.

Cateto 1	Cateto 2	Hipotenusa	Senos 1	Senos 2
5	12	13	0,385	0,923
8	15	17	0,471	0,882
7	24	25	0,280	0,960
12	35	37	0,324	0,946
11	60	61	0,180	0,984
20	21	29	0,690	0,724
9	40	41	0,220	0,976

Portanto, o maior seno é $\frac{60}{61} \cong 0,984$.

3. Observe que os lados do triângulo verificam a recíproca do “Teorema de Pitágoras”, ou seja,

$$6^2 + 8^2 = 10^2.$$

Portanto esse triângulo é retângulo com hipotenusa 10, com um dos seus ângulos agudos tendo seno igual a $\frac{6}{10}$, cosseno igual a $\frac{8}{10}$ e tangente igual a $\frac{6}{8}$ e o outro possui seno igual a $\frac{8}{10}$, cosseno igual a $\frac{6}{10}$ e tangente igual a $\frac{8}{6}$.

4. Pela Recíproca do Teorema de Pitágoras, temos que ambos são triângulos retângulos, pois,

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \text{ e } 9^2 + 12^2 = 15^2.$$

No primeiro triângulo, um dos ângulos agudos (α_1) tem seno igual a $\frac{3}{5}$, cosseno igual a $\frac{4}{5}$ e tangente igual a $\frac{3}{4}$ e o outro (β_1) possui seno igual a $\frac{4}{5}$, cosseno igual a $\frac{3}{5}$ e tangente igual a $\frac{4}{3}$. Já no segundo teremos os mesmos valores de senos, cossenos e tangentes para α_2 e β_2 , respectivamente. Portanto nos dois triângulos teremos ângulos retos, $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\beta_1 = \beta_2$.

5. Retirando os dados da tabela 2, obtemos:

a) $\text{sen } 57^\circ = 0,84 = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 84;$

b) $\text{cos } 80^\circ = 0,17 = \frac{x}{200} \Rightarrow x = 34;$

c) $\text{tg } 20^\circ = 0,36 = \frac{x}{300} \Rightarrow x = 108$ e
 $\text{tg } 40^\circ = 0,84 = \frac{y}{300} \Rightarrow y = 252$. Portanto, $BD = 360;$

d) Observe que $\triangle DBC$ é isósceles de base BC , pois $D\hat{C}A = 15^\circ$, então $CD = DA = 400$ cm. Sendo $BC = x$ e aplicando que $\text{sen } 30^\circ = \frac{x}{400}$ concluiremos que $x = 200$ cm;

e) Sejam α e β os ângulos opostos ao maior e menor catetos, respectivamente. Fazendo $\text{tg } \beta = \frac{34}{93} \cong 0,37$, encontraremos, pela tabela 2, que $\beta \cong 20^\circ;$

f) Sejam α e β os ângulos opostos ao maior e menor catetos, respectivamente. Se fizermos a $\text{tg } \alpha = \frac{97}{26} \cong 3,73$, um valor fora da tabela 2. Contudo, para $\text{tg } \beta = \frac{26}{97} \cong 0,27$, daí, $\beta \cong 15^\circ$, então $\alpha \cong 75^\circ;$ e

g) Como $\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$, concluímos que o cateto oposto é metade da hipotenusa.

6. (Adaptado da Vídeo Aula)

Inicialmente devemos calcular o valor da hipotenusa x utilizando o Teorema de Pitágoras.

$$x^2 = 3^2 + 4^2$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5$$

Então o $\text{sen } \alpha = \text{cos } \beta = \frac{3}{5}$, o $\text{cos } \alpha = \text{sen } \beta = \frac{4}{5}$, a $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$ e a $\text{tg } \beta = \frac{4}{3}$.

Comentário para professores: Na resolução da equação $x^2 = 25$ só foi destacada a sua raiz positiva, pois x representa a medida da hipotenusa. Deve-se ressaltar que nem sempre será utilizada apenas a raiz positiva.

7. Pela relação fundamental da trigonometria temos que $(0,6)^2 + \text{cos}^2 \alpha = 1$, daí $\text{cos } \alpha = 0,8$ e a

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

8. Podemos dividir a relação por $\text{cos}^2 x \neq 0$, obtendo

$$\begin{aligned} \text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x &= 1 \\ \frac{\text{sen}^2 x}{\text{cos}^2 x} + \frac{\text{cos}^2 x}{\text{cos}^2 x} &= \frac{1}{\text{cos}^2 x} \\ \text{tg}^2 x + 1 &= \text{sec}^2 x \end{aligned}$$

9. (Adaptado da Vídeo Aula)

Na figura 4 podemos destacar o triângulo BHC , retângulo em H , e aplicar o Teorema de Pitágoras.

$$2^2 = 1^2 + h^2$$

$$h^2 = 3$$

$$h = \sqrt{3}$$

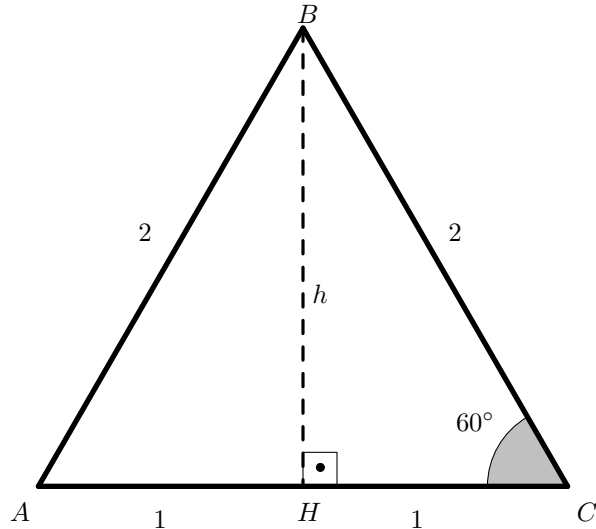


Figura 4

No mesmo triângulo, o ângulo de 60° terá cateto oposto igual a $\sqrt{3}$, cateto adjacente 1 e hipotenusa 2, portanto $\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, o $\text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$ e a $\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$, o que responde o item a. Na sequência, como 60° e 30° são complementares teremos:

i) $\text{sen } 60^\circ = \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$

ii) $\text{sen } 30^\circ = \text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2};$ e

iii) $\text{tg } 60^\circ \cdot \text{tg } 30^\circ = 1$, resultando em $\text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

9. Outro método: Só para 30° .

De outra maneira, observe que no triângulo da figura 4 o ângulo $H\hat{B}C = 30^\circ$, o respectivo cateto oposto medirá 1, o cateto adjacente $\sqrt{3}$ e a hipotenusa 2, daí:

i) $\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2};$

ii) $\text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$ e

iii) $\text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

10. Seja $ABCD$ o quadrado de lado 1 cm, pelo Teorema de Pitágoras, a sua diagonal medirá $\sqrt{2}$ cm e $\widehat{BCD} = 45^\circ$ (figura 5)

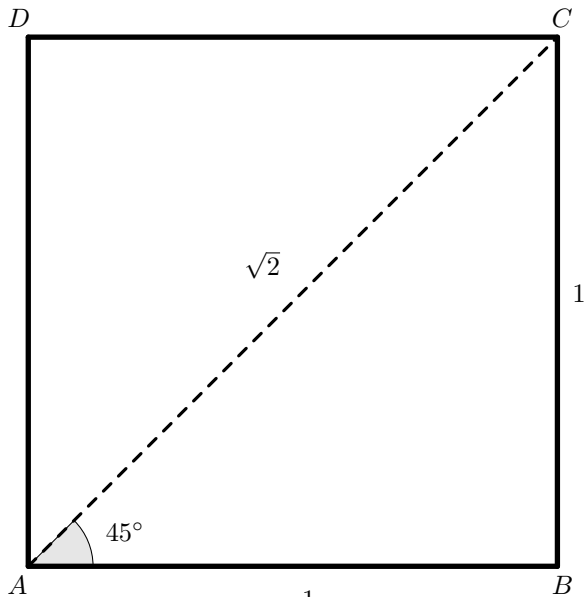


Figura 5

Portanto:

$$\text{i) } \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{ii) } \operatorname{cos} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{iii) } \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1.$$

Comentário para professores: Nos problemas 9 e 10 utilizamos triângulo e quadrado com comprimentos dados para seus lados. A análise geral do problema (feita no vídeo) com lado medindo ℓ , pode ser desenvolvida de modo análogo. Por hora, chegamos a tabela 3 dos senos, cossenos e tangentes dos arcos notáveis 30° , 45° e 60° .

Tabela 3: 30° , 45° e 60° .

Arco	sen	cos	tg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

11. Observando que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$ teremos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \\ &= \operatorname{sen}^2 \alpha \end{aligned}$$

12. A rampa deve ser vista como a hipotenusa de um triângulo retângulo e a altura h será o cateto oposto ao ângulo de 30° . Então usaremos o $\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{h}{6}$, sendo assim, $h = 3$ m ou 300 cm. Para a quantidade de degraus basta fazermos $\frac{300}{25} = 12$ degraus.

13. (Extraído do material do IMPA/PAPMEM.)

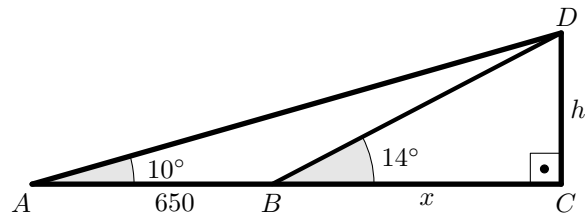


Figura 6

Sejam h a altura do Pão de Açúcar e x a distância de B ao pé da altura (figura 6), então teremos que

$$\operatorname{tg} 14^\circ = \frac{h}{x} = 0,2493 \text{ e } \operatorname{tg} 10^\circ = \frac{h}{650 + x} = 0,1763.$$

Após resolver o sistema, chegaremos a $h = 391,4$.

Comentário para professores: É sempre importante frisar aos estudantes que a trigonometria evoluiu para medir distâncias/tamanhos, em regra, inacessíveis às ferramentas básicas. Um dos instrumentos de medida usuais é o teodolito (figura 7), que faz medidas de ângulos com imensa precisão na vertical e na horizontal¹.

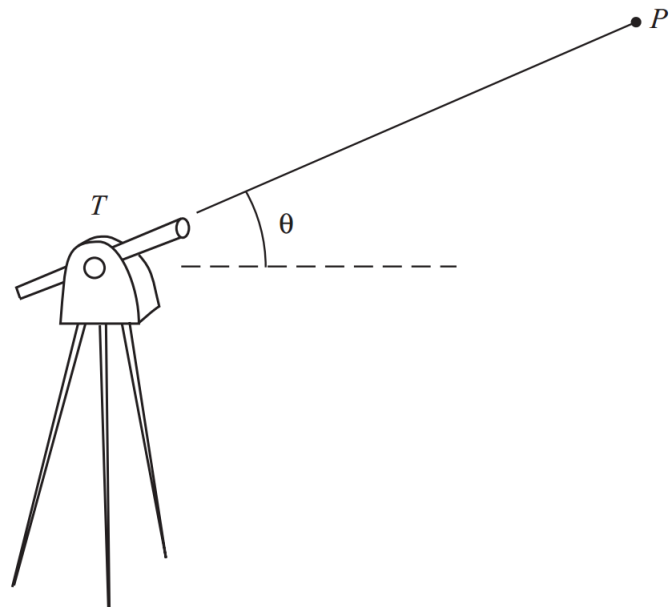


Figura 7: Teodolito.

¹Imagem: Capítulo 4, ensinomedio.impa.br, acesso em 2004.

14.

a) (Adaptado do vestibular do IFSP/2014)

Sejam c o comprimento da escada e A' a projeção de A em CD . Como o alcance da escada é de 54 metros, teremos $A'C = 52$ m. Usando o $\text{sen } 60^\circ = \frac{52}{c}$, então

$$c = \frac{104}{\sqrt{3}} = \frac{104\sqrt{3}}{3} \text{ m.}$$

b) Com a perda de 25% o novo ângulo será $0,75 \cdot 60^\circ = 45^\circ$. A nova altura máxima será $h' + 2$, com $A'C' = h'$, definindo C' como o ponto onde a escada toca o prédio.

$$\text{Fazendo } \text{sen } 45^\circ = \frac{h'}{104}, \text{ então } h' + 2 = \frac{52\sqrt{6} + 6}{3} \text{ m.}$$

15. Desenvolvendo a equação inicial, destacando que $\cos x \neq 0$, chegamos a

$$\begin{aligned} \sec x - \tan x &= 1 \\ \frac{1}{\cos x} - \frac{\text{sen } x}{\cos x} &= 1 \\ 1 - \text{sen } x &= \cos x \end{aligned}$$

Substituindo na relação fundamental teremos

$$\begin{aligned} \text{sen}^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \text{sen}^2 x + (1 - \text{sen } x)^2 &= 1 \\ 2\text{sen}^2 x - 2\text{sen } x &= 0 \\ \text{sen } x (2\text{sen } x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Donde, $\text{sen } x = 0$ (com $\cos x = 1$) ou $\text{sen } x = 1$, e apenas o primeiro serve, pois para o segundo teríamos $\cos x = 0$, **absurdo**. Por fim, $\sec x = 1$ e $\text{tg } x = 0$, portanto

$$\sec x + \text{tg } x = 1.$$

16. Elevando as duas equações ao quadrado chegaremos a:

$$\begin{aligned} 3 \text{sen } A + 4 \cos B &= 6 \\ (3 \text{sen } A + 4 \cos B)^2 &= 6^2 \\ 9\text{sen}^2 A + 24 \text{sen } A \cos B + 16\cos^2 B &= 36 \end{aligned} \quad (1)$$

e

$$\begin{aligned} 4 \text{sen } B + 3 \cos A &= 1 \\ (4 \text{sen } B + 3 \cos A)^2 &= 1^2 \\ 16\text{sen}^2 B + 24 \text{sen } B \cos A + 9\cos^2 A &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Somando (1) com (2), teremos

$$\begin{aligned} 16 + 24 \text{sen } A \cos B + 24 \text{sen } B \cos A + 9 &= 36 + 1 \\ 25 + 24(\text{sen } A \cos B + \text{sen } B \cos A) &= 36 + 1 \\ 24(\text{sen } A \cos B + \text{sen } B \cos A) &= 12 \\ \text{sen}(A + B) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Logo, $A + B = 30^\circ$ e então $C = 150^\circ$.

17. (Extraído do vestibular do Centro Universitário São Camilo SP/2014)

Da definição de inclinação de um telhado concluímos que estamos trabalhando com a tangente do ângulo α . Sendo assim, $\text{tg } \alpha = 9,5\% = 0,095$, o que conclui $5^\circ < \alpha < 5,5^\circ$.

18. A partir da altura $BH = h$ relativa à AC temos $\text{sen } \alpha = \frac{h}{c}$ então $h = c \cdot \text{sen } \alpha$ (figura 11).

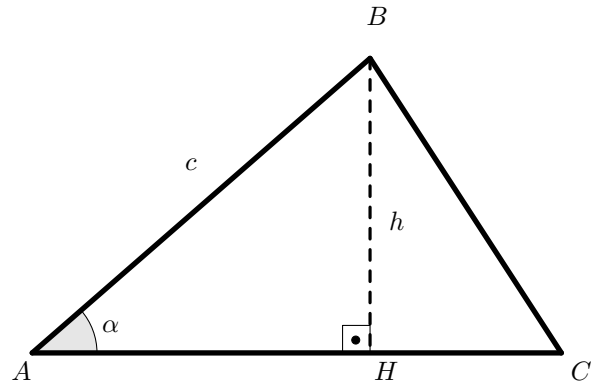


Figura 11

Por fim, como a base $AC = b$, $S = \frac{bh}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen } \alpha}{2}$. ■

$$19. S_{ABC} = \frac{\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \text{sen } 45^\circ}{2} = 3 \text{ cm}^2.$$

20. Temos $CD = AC \cdot \text{tg } \alpha = BC \cdot \text{tg } \beta$. Como $AC = BC + d$, vem $(BC + d) \cdot \text{tg } \alpha = BC \cdot \text{tg } \beta$, e daí

$$BC = d \cdot \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}$$

e

$$CD = BC \cdot \text{tg } \beta = d \cdot \frac{\text{tg } \alpha \text{tg } \beta}{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta},$$

que é a resposta para a pergunta.

21. Seja S a área do $\triangle ABC$, então $S_2 = S - S_1$. Tomando como base o ângulo $\hat{A}BC = \beta$ teremos que:

$$\begin{aligned} S &= \frac{12 \cdot 15 \cdot \text{sen } \beta}{2}; \\ S_1 &= \frac{10 \cdot 9 \cdot \text{sen } \beta}{2}; \text{ e} \\ S_2 &= \frac{12 \cdot 15 \cdot \text{sen } \beta}{2} - \frac{10 \cdot 9 \cdot \text{sen } \beta}{2}. \end{aligned}$$

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S_2} &= \frac{\frac{10 \cdot 9 \cdot \text{sen } \beta}{2}}{\frac{12 \cdot 15 \cdot \text{sen } \beta}{2} - \frac{10 \cdot 9 \cdot \text{sen } \beta}{2}} \\ \frac{S_1}{S_2} &= 1. \end{aligned}$$

Ou seja, podemos concluir que $S_1 = S_2$.

22. A composição das figuras não constroem triângulos, é uma ilusão de ótica². No triângulo menor temos que o ângulo agudo da base tem $\text{tg } \alpha_1 = \frac{2}{5}$ e no maior, $\text{tg } \alpha_2 = \frac{3}{8}$. Logo, a figura 13 não é um triângulo (nem a figura 14), por isso, na reorganização, surge um quadradinho branco. Após a movimentação, a suposta “hipotenusa” da figura grande muda levemente a curvatura, avançando a diferença de 1 quadradinho que surge.

23. (Extraído do Geogebra.org)

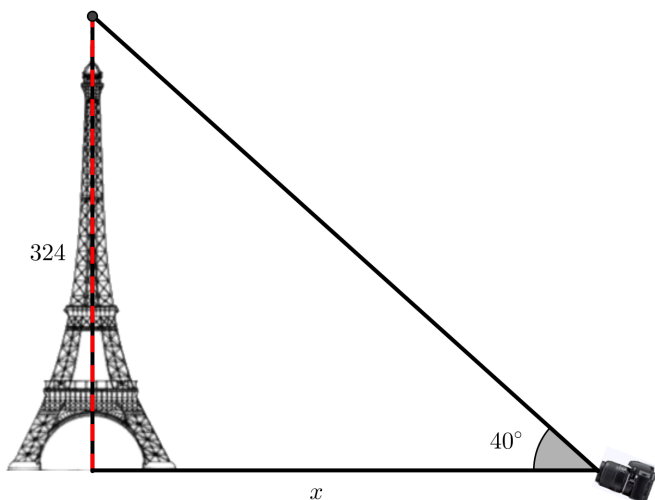


Figura 16

Usando que $\text{tg } 40^\circ = \frac{324}{x}$, obteremos que $x \cong 385,72$ metros. (a aproximação foi para “cima”, se a fizéssemos para baixo poderíamos perder parte da antena da torre).

24.

a) $\cos \alpha = \frac{1}{AB} \Rightarrow AB = \frac{1}{\cos \alpha}$.

b) $\sin \alpha = \frac{HB}{AB} \Rightarrow HB = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

c) $\cos \beta = \frac{1}{AC} \Rightarrow AC = \frac{1}{\cos \beta}$.

d) $\sin \beta = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

e) $S_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{2}$.

f) $S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$.

g) Pelos itens e e f teremos que

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$

²Chamada de “Paradoxo do quadrado perdido”

25. Sendo E a interseção de AF com BD , temos que:

- i) $AB = \cos(\alpha + \beta)$;
- ii) $DG = \sin \beta$;
- iii) $AG = \cos \beta$;
- iv) $EG = \sin \beta \cdot \text{tg } \alpha$;
- v) $AE = \cos \beta - \text{tg } \alpha \cdot \sin \beta$;
- vi) $BE = \cos(\alpha + \beta) \cdot \text{tg } \alpha$; e
- vii) $ED = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha}$.

Perceba que $\triangle ABD$ e $\triangle AGD$ podem ser inscritos na mesma semicircunferência³ (figura 19).

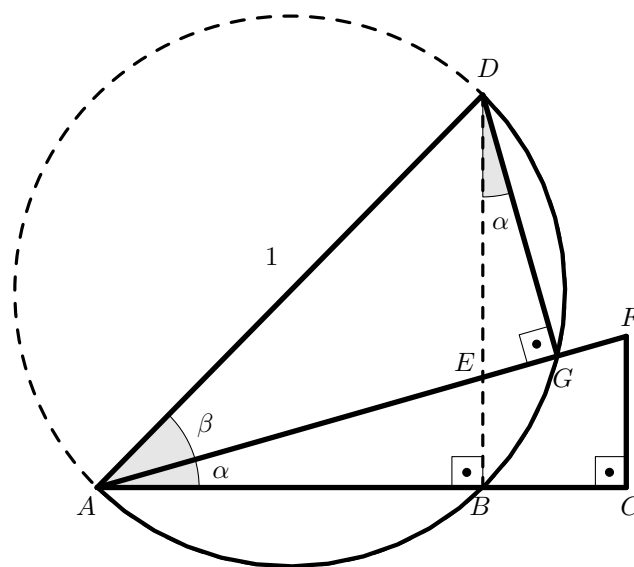


Figura 19

Podemos aplicar a potência do ponto E fazendo

$$AE \cdot EG = DE \cdot EB$$

$$(\cos \beta - \text{tg } \alpha \cdot \sin \beta) \cdot \sin \beta \cdot \text{tg } \alpha = \cos(\alpha + \beta) \cdot \text{tg } \alpha \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \alpha}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Observação: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ e $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, por definição. Daí, $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$ e $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$. Essas fórmulas serão demonstradas, para ângulos agudos, na questão 43.

26. (Extraído do exame do PROFMAT/2014)
Como a hipotenusa mede 13 e um dos catetos mede 5, pelo Teorema de Pitágoras, o outro cateto mede 12. Os ângulos agudos terão tangentes iguais a $\frac{5}{12}$ e $\frac{12}{5}$. Portanto $\frac{5}{12} + \frac{12}{5} \cong 2,8$ e a resposta é letra **E**.

³ $ABGD$ é quadrilátero inscrito

27. (Extraído do exame do PROFMAT/2014)

Seja x o cateto oposto a 30° . Então $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{200} = 0,57$. Logo, $x = 114$ m e a altura do morro é de $x = 114 + 1,6 = 115,6$ m. Portanto, resposta é letra **D**.

28. (Extraído do exame do PROFMAT/2014)

Sejam $BD = y$ e $BE = x$. Portanto, no $\triangle BDC$, temos que $\cos \alpha = \frac{y}{5}$, no $\triangle BED$, $\cos \alpha = \frac{x}{y}$ e no $\triangle BAE$, $\cos \alpha = \frac{1}{x}$. Resolvendo esse sistema, teremos que $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ e, portanto, a resposta é letra **B**.

29. (Extraído do vestibular da ESPM/2014)

Sejam r e s as retas representadas da figura 21, s é a tracejada. Denomine a projeção de A na reta r como o ponto B . Então $\cos 60^\circ = \frac{PB}{8}$ e $\sin 60^\circ = \frac{AB}{8}$, portanto $AB = 4\sqrt{3}$ km e $PB = 4$ km. Chame de B' a projeção de A' na reta r . Perceba que $AB = A'B' = 4\sqrt{3}$ km, então $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{PB'}$, isto é, $PB' = 12$ km e, por fim, $AA' = 8$ km. O avião percorreu essa distância em dois minutos, em uma hora iria percorrer $8 \cdot 30 = 240$ km, o que conclui uma velocidade média de 240 km/h. Resposta na letra **B**.

30. Usaremos que $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$.

a) Sendo $\alpha = \beta = x$ teremos

$$\begin{aligned}\sin(x+x) &= \sin x \cos x + \sin x \cos x \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x\end{aligned}$$

b) Sendo $\alpha = \beta = \frac{x}{2}$ teremos

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) &= \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ \sin(x) &= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

c) A partir da relação fundamental da trigonometria, temos

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x\end{aligned}$$

d) Análogo ao anterior.

e) Sendo $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ e tomando $\alpha = \beta = x$ teremos $\cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x$ que é o mesmo que $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

f) Aplicando c em e temos o que foi pedido.

g) Análogo ao anterior.

h) Essa é uma rearrumação da fórmula do do item f.

31. (Adaptado da Olimpíada de Matemática do RJ)

$$\begin{aligned}(1 + \operatorname{tg}^2 x) \cos x &= 2 \\ \sec^2 x \cdot \cos x &= 2 \\ \cos x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Sendo $0 < x < 90^\circ$ então $x = 60^\circ$. Por fim, como $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, obteremos

$$\cos(120^\circ) = 2\cos^2 60^\circ - 1 = -\frac{1}{2}.$$

32. Para resolver essa questão utilizaremos as fórmulas:

i) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$; e

ii) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

a) Podemos fazer

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}\end{aligned}$$

b) Observe que

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(1^\circ + 44^\circ) &= \operatorname{tg} 45^\circ \\ \frac{\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 44^\circ}{1 - \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ} &= 1 \\ 1 - \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ &= \operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 44^\circ \\ \operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 44^\circ + \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ &= 1 \\ 1 + \operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 44^\circ + \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ &= 2 \\ (1 + \operatorname{tg} 1^\circ) + \operatorname{tg} 44^\circ(1 + \operatorname{tg} 1^\circ) &= 2 \\ (1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 44^\circ) &= 2\end{aligned}$$

c) Análogo ao anterior.

d) Usando os itens anteriores concluímos que a expressão é igual a 2^{22} , um quadrado perfeito cuja raiz quadrada é $2^{11} = 2048$.

Observação: Para a $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ devemos usar as fórmulas de $\sin(\alpha - \beta)$ e $\cos(\alpha - \beta)$ e chegaremos a

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

33. Observe que $1 = k + 1 - k$, portanto

a)

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} 1^\circ}{\cos k^\circ \cdot \cos(k+1)^\circ} &= \\ \frac{\operatorname{sen}(k+1-k)^\circ}{\cos k^\circ \cdot \cos(k+1)^\circ} &= \\ \frac{\operatorname{sen}(k+1)^\circ \cos k^\circ - \operatorname{sen} k^\circ \cos(k+1)^\circ}{\cos k^\circ \cdot \cos(k+1)^\circ} &= \\ \frac{\operatorname{sen}(k+1)^\circ \cos k^\circ}{\cos k^\circ \cdot \cos(k+1)^\circ} - \frac{\operatorname{sen} k^\circ \cos(k+1)^\circ}{\cos k^\circ \cdot \cos(k+1)^\circ} &= \\ = \operatorname{tg}(k+1)^\circ - \operatorname{tg} k^\circ. \end{aligned}$$

b) (Adaptado da Olimpíada de Matemática do RJ)

Utilizando o item a podemos reescrever a expressão original como

$$\operatorname{tg} 1^\circ - \operatorname{tg} 0^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ - \operatorname{tg} 1^\circ + \dots + \operatorname{tg} 2015^\circ - \operatorname{tg} 2014^\circ = \operatorname{tg} 2015^\circ.$$

34. Para resolver esse item utilizaremos as fórmulas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \cos(90^\circ - \alpha); \text{ e} \\ \operatorname{sen} 2\alpha &= 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

a) $(\operatorname{sen} 1^\circ) \cdot (\operatorname{sen} 89^\circ) = (\operatorname{sen} 1^\circ) \cdot (\cos 1^\circ) = \frac{(\operatorname{sen} 2^\circ)}{2}$.

b) $(\operatorname{sen} 2^\circ) \cdot (\operatorname{sen} 88^\circ) = (\operatorname{sen} 2^\circ) \cdot (\cos 2^\circ) = \frac{(\operatorname{sen} 4^\circ)}{2}$.

c) (Extraído da Olimpíada de Matemática do RJ)

$$\begin{aligned} & \frac{(\operatorname{sen} 1^\circ)(\operatorname{sen} 3^\circ)(\operatorname{sen} 5^\circ) \dots (\operatorname{sen} 87^\circ)(\operatorname{sen} 89^\circ)}{(\operatorname{sen} 1^\circ)(\operatorname{sen} 3^\circ) \dots (\operatorname{sen} 89^\circ)(\operatorname{sen} 2^\circ)(\operatorname{sen} 4^\circ) \dots (\operatorname{sen} 88^\circ)} \\ &= \frac{(\operatorname{sen} 2^\circ)(\operatorname{sen} 4^\circ)(\operatorname{sen} 6^\circ) \dots (\operatorname{sen} 86^\circ)(\operatorname{sen} 88^\circ)}{(\operatorname{sen} 2^\circ)(\operatorname{sen} 4^\circ)(\operatorname{sen} 6^\circ) \dots (\operatorname{sen} 86^\circ)(\operatorname{sen} 88^\circ)} \\ &= \frac{(\operatorname{sen} 1^\circ)(\operatorname{sen} 89^\circ)(\operatorname{sen} 2^\circ)(\operatorname{sen} 88^\circ) \dots (\operatorname{sen} 46^\circ)(\operatorname{sen} 45^\circ)}{(\operatorname{sen} 2^\circ)(\operatorname{sen} 4^\circ)(\operatorname{sen} 6^\circ) \dots (\operatorname{sen} 86^\circ)(\operatorname{sen} 88^\circ)} \\ &= \frac{(\operatorname{sen} 1^\circ)(\cos 1^\circ)(\operatorname{sen} 2^\circ)(\cos 2^\circ) \dots (\cos 44^\circ)(\operatorname{sen} 45^\circ)}{(\operatorname{sen} 2^\circ)(\operatorname{sen} 4^\circ)(\operatorname{sen} 6^\circ) \dots (\operatorname{sen} 86^\circ)(\operatorname{sen} 88^\circ)} \\ &= \frac{\frac{(\operatorname{sen} 2^\circ)}{2} \frac{(\operatorname{sen} 4^\circ)}{2} \dots \frac{(\operatorname{sen} 88^\circ)}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{(\operatorname{sen} 2^\circ)(\operatorname{sen} 4^\circ)(\operatorname{sen} 6^\circ) \dots (\operatorname{sen} 86^\circ)(\operatorname{sen} 88^\circ)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \dots \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{2^{44} \cdot 2^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{2^{\frac{89}{2}}} \end{aligned}$$

Portanto, $n = 44, 5$.

35. Usando os valores da figura 22 teremos pela proposição 1 que $\frac{(ABD)}{(CBD)} = \frac{x}{y}$.

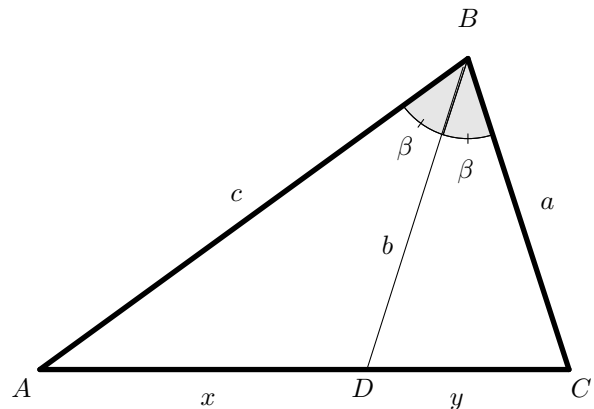


Figura 22

Aplicando o resultado do exercício 18 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{cb \cdot \operatorname{sen} \beta}{2} &= \frac{x}{y} \\ \frac{ab \cdot \operatorname{sen} \beta}{2} &= \frac{x}{y} \\ \frac{c}{a} &= \frac{x}{y} \\ \frac{AD}{AB} &= \frac{DC}{CB}. \end{aligned}$$

O que demonstra a proposição 2.

Comentário para professores: A proposição 2 é conhecida também como “Teorema da Bissetriz Interna” ou, pela forma lúdica, “Teorema da Bailarina”. Esse segundo nome é pela forma de visualizar a aplicação prática que lembra um movimento de Balé (figura 23).

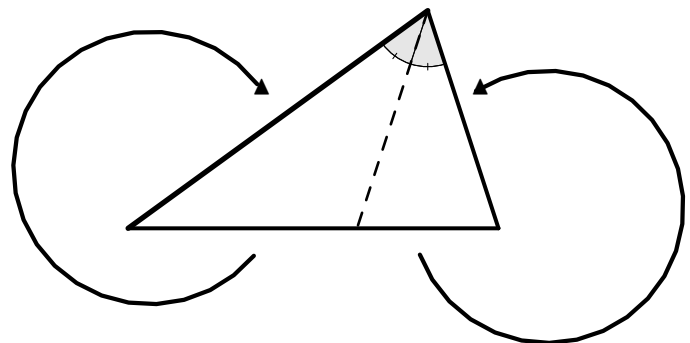


Figura 23

Em resumo, num $\triangle ABC$ com bissetriz BD , $D \in AC$, como na figura 22, temos que

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{CB}.$$

36. $\hat{A}BC = \hat{B}CA = 72^\circ$, pois ABC é isósceles de base BC (figura 25).

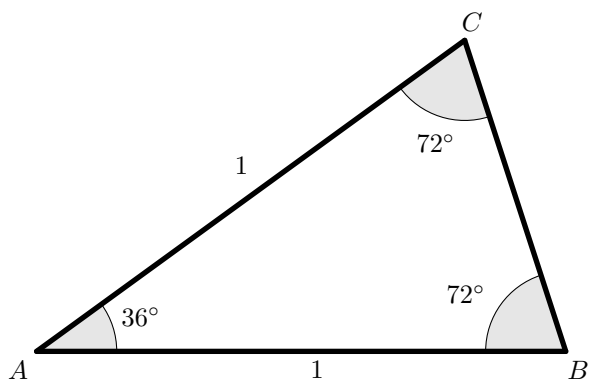


Figura 25

A bissetriz do ângulo $\hat{A}BC$ encontra AC no ponto D e separa os triângulos isósceles ABD , de base AB , e BDC , de base DC . Donde segue que $CD = AD = BC = x$ e $BD = 1 - x$ (figura 26).

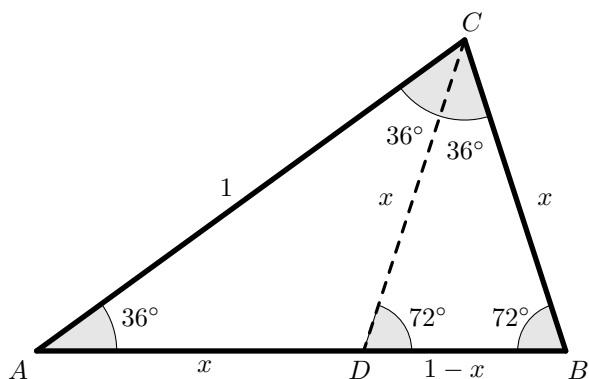


Figura 26

Pelo Teorema da Bissetriz Interna teremos

$$\begin{aligned} \frac{x}{1} &= \frac{1-x}{x} \\ x^2 &= 1-x \\ x^2 + x - 1 &= 0 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Com $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, pois $x > 0$. Na sequência, a bissetriz de $\hat{B}AC$ (que contém as altura e mediana relativas a BC) tem interseção com BC em H . (figura 27).

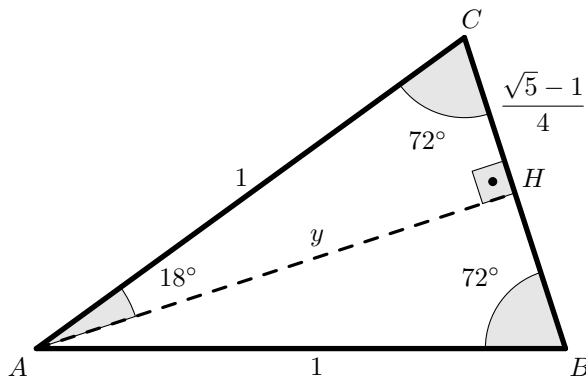


Figura 27

No $\triangle AHB$, retângulo em H , teremos que calcular o valor do cateto $AH = y$, portanto

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 + y^2 &= 1^2 \\ 5 - 2\sqrt{5} + 1 + 16y^2 &= 16 \\ 16y^2 &= 10 + 2\sqrt{5} \\ y &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \end{aligned}$$

E obtemos:

- a) $\text{sen } 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ e $\text{cos } 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$;
 b) $\text{sen } 72^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ e $\text{cos } 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
 c) Para 36° utilizaremos as fórmulas de arco duplo.

$$\begin{aligned} \text{sen } 36^\circ &= \text{sen}(18^\circ + 18^\circ) \\ &= 2 \text{sen}(18^\circ) \text{cos}(18^\circ) \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \\ &= \frac{\sqrt[4]{20}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cos } 36^\circ &= \text{cos}(18^\circ + 18^\circ) \\ &= \text{cos}^2 18^\circ - \text{sen}^2 18^\circ \\ &= \left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{10+2\sqrt{5}}{16} - \frac{6-2\sqrt{5}}{16} \\ &= \frac{4\sqrt{5}-2}{16} \\ &= \frac{2\sqrt{5}-1}{8} \end{aligned}$$

- d) $\text{sen } 54^\circ = \frac{2\sqrt{5}-1}{8}$ e $\text{cos } 54^\circ = \frac{\sqrt[4]{20}}{4}$.

37.

a) As fórmulas do cosseno da soma e da subtração são

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \quad (3)$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b. \quad (4)$$

Fazendo (4) - (3), teremos

$$\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

b) Usando a fórmula do item a,

$$\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

fazendo $a - b = 1^\circ$ e $a + b = 1^\circ$ teremos $a = 23^\circ$ e $b = 22^\circ$, o que demonstra o pedido. ■

c) Provar o solicitado é equivalente a provar que

$$\begin{aligned} (1 - \operatorname{cotg} 23^\circ)(1 - \operatorname{cotg} 22^\circ) &= 2 \\ \left(1 - \frac{\cos 23^\circ}{\operatorname{sen} 23^\circ}\right) \left(1 - \frac{\cos 22^\circ}{\operatorname{sen} 22^\circ}\right) &= \\ \frac{(\operatorname{sen} 23^\circ - \cos 23^\circ)(\operatorname{sen} 22^\circ - \cos 22^\circ)}{\operatorname{sen} 23^\circ \cdot \operatorname{sen} 22^\circ} &= \\ \frac{A - B}{\operatorname{sen} 23^\circ \cdot \operatorname{sen} 22^\circ} &= \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} A &= \cos 23^\circ \cos 22^\circ + \operatorname{sen} 22^\circ \operatorname{sen} 23^\circ \\ &= \cos(23^\circ - 22^\circ) \\ &= \cos 1^\circ \quad \text{e} \\ B &= \operatorname{sen} 22^\circ \cos 23^\circ - \operatorname{sen} 23^\circ \cos 22^\circ \\ &= \operatorname{sen}(22^\circ + 23^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \end{aligned}$$

pelo item b, teremos

$$\operatorname{sen} 23^\circ \cdot \operatorname{sen} 22^\circ = \frac{\cos 1^\circ - \cos 45^\circ}{2}$$

por fim, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{A - B}{\operatorname{sen} 23^\circ \cdot \operatorname{sen} 22^\circ} &= \\ \frac{\cos 1^\circ - \cos 45^\circ}{\operatorname{sen} 23^\circ \cdot \operatorname{sen} 22^\circ} &= \\ \frac{\cos 1^\circ - \cos 45^\circ}{\frac{\cos 1^\circ - \cos 45^\circ}{2}} &= \\ &= 2 \end{aligned}$$

38.

a) Observe que $D\hat{E}A = 90^\circ - \alpha$, portanto $B\hat{E}F = \alpha$ e $B\hat{F}E = 90^\circ - \alpha$. De modo análogo, $D\hat{F}E = 90^\circ - \beta$ e $D\hat{F}C = \alpha + \beta$.

b) Temos no:

i) $\triangle DEF$, $DE = \cos \beta$ e $EF = \operatorname{sen} \beta$;

ii) $\triangle ADE$, $AD = DE \cdot \cos \alpha$ e $AE = DE \cdot \operatorname{sen} \alpha$;

iii) $\triangle BEF$, $BE = EF \cdot \cos \alpha = \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$ e $BF = EF \cdot \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha$; e

iv) $\triangle CDF$, $CD = \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ e $CF = \cos(\alpha + \beta)$.

Concluimos que,

$$\cos \alpha \cos \beta = AD = BF + FC = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + \cos(\alpha + \beta)$$

Ou seja,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta. \quad \blacksquare$$

39. Pela figura 29, queremos provas que $\theta = \alpha + \beta$.

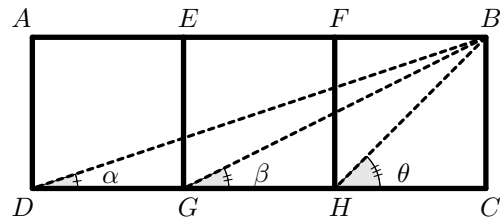


Figura 29

Temos que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{tg} \theta = 1$. Utilizando a tangente da soma chegamos a

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \\ &= \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} \\ &= 1 \\ &= \operatorname{tg} \theta \\ \alpha + \beta &= \theta. \end{aligned}$$

40.

- a) Basta desenvolver os dois membros da equação.
 b) Basta desenvolver os dois membros da equação.
 c) (Extraído da Olimpíada Cearense de Matemática)
 Supondo que $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{p}{q}$, p inteiro e q inteiro não nulo e usando as identidades dos itens a e b teremos

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\frac{2p}{q}}{1 + \frac{p^2}{q^2}} = \frac{2pq}{p^2 + q^2} \text{ e } \operatorname{cos} \alpha = \frac{1 - \frac{p^2}{q^2}}{1 + \frac{p^2}{q^2}} = \frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2},$$

o que conclui que $\operatorname{cos} \alpha$ e $\operatorname{sen} \alpha$ são também racionais. ■

- d) Basta desenvolver os dois membros da equação.
 e) (Extraído da Olimpíada Cearense de Matemática)
 Utilizando a identidade do item d teremos que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \operatorname{cosec} \alpha - \operatorname{cotg} \alpha \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \end{aligned}$$

Daí, como $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e portanto a divisão por $\operatorname{sen} \alpha$ existe, a $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ é racional.

41. (Extraído do vestibular da UERJ RJ)
 Sendo $\alpha = \widehat{BAC}$ e $\beta = \widehat{CAB}$, teremos $\widehat{BAD} = \alpha + \beta$. Daí,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{150}{30} = 5$, e

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \\ 5 &= \frac{\frac{2}{3} + \operatorname{tg} \beta}{1 - \frac{2}{3} \cdot \operatorname{tg} \beta} \\ 5 - \frac{10}{3} \cdot \operatorname{tg} \beta &= \frac{2}{3} + \operatorname{tg} \beta \\ 15 - 10 \cdot \operatorname{tg} \beta &= 2 + 3 \operatorname{tg} \beta \\ \operatorname{tg} \beta &= 1. \end{aligned}$$

Por fim, $\beta = 45^\circ$, que está na letra **B**.

42. Com $\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x = \sqrt{2}$, teremos

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x)^2 &= (\sqrt{2})^2 \\ \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x + \operatorname{cos}^2 x &= 2 \\ 1 + \operatorname{sen}(2x) &= 2 \\ \operatorname{sen}(2x) &= 1. \end{aligned}$$

43. Observe que $\widehat{CAD} = \alpha - \beta$ e ainda:

- i) $AB = \frac{1}{\operatorname{cos} \beta} = \sec \beta$; iv) $BD = \operatorname{tg} \alpha$;
 ii) $AD = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha} = \sec \alpha$; v) $DC = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta$;
 iii) $BC = \operatorname{tg} \beta$; vi) $\widehat{ADC} = 90^\circ - \alpha$; e
 vii) $\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cos} \alpha$.

- a) Seguindo, pela lei dos senos, obteremos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{cos} \beta} &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)} \\ \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta} &= \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta \\ \operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \alpha. \end{aligned}$$

- b) Seguindo, pela lei dos cossenos, teremos que

$$(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)^2 = \sec^2 \alpha + \sec^2 \beta - 2 \cdot \frac{\operatorname{cos}(\alpha - \beta)}{\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta}.$$

Desenvolvendo as contas e utilizando que

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \sec^2 \alpha = -1 \text{ e } \operatorname{tg}^2 \beta - \sec^2 \beta = -1$$

encontraremos

$$\begin{aligned} -1 - 1 - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta &= -2 \cdot \frac{\operatorname{cos}(\alpha - \beta)}{\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta} \\ \frac{\operatorname{cos}(\alpha - \beta)}{\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta} &= 1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \\ \operatorname{cos}(\alpha - \beta) &= \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta. \end{aligned}$$

44. (Extraído da Olimpíada de Matemática da China)
 Começamos fazendo as substituições $x + 5 = 14 \operatorname{cos} \theta$ e $y - 12 = 14 \operatorname{sen} \theta$, para $\theta \in [0, 2\pi[$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (14 \operatorname{cos} \theta - 5)^2 + (14 \operatorname{sen} \theta + 12)^2 \\ &= 365 - 140 \operatorname{cos} \theta + 336 \operatorname{sen} \theta \\ &= 365 + 28(12 \operatorname{sen} \theta - 5 \operatorname{cos} \theta) \\ &= 365 + 28 \cdot 13 \operatorname{sen}(\theta - \alpha) \\ &= 365 + 364 \operatorname{sen}(\theta - \alpha), \end{aligned}$$

com $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$. Daí, o mínimo $x^2 + y^2$ ocorrerá quando $365 + 364 \operatorname{sen}(\theta - \alpha)$ for o menor possível. Ou seja, quando $\operatorname{sen}(\theta - \alpha) = -1$. O que resulta em $\operatorname{mín} \{x^2 + y^2\} = 1$. Isso ocorre quando $\theta = \frac{3\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$, ou seja, $x = \frac{5}{13}$ e $y = -\frac{12}{13}$. A resposta está na letra **B**.

Comentário para professores: A partir dos resultados anteriores e com algum trabalho algébrico poderíamos calcular os senos, cossenos e as tangentes, utilizando arcos somas, diferença, duplos e metades, de por exemplo: 9° (metade de 18°), 27° (metade de 54°), 39° (da soma $30^\circ + 9^\circ$), 48° (da soma $39^\circ + 9^\circ$), 24° (metade de 48°), 12° (metade de 24°), 6° (metade de 12°), 3° (metade de 6°), 15° (metade de 30°), 75° (da soma $30^\circ + 45^\circ$), 84° (da soma $75^\circ + 9^\circ$), 42° (metade de 84°), 21° (metade de 42°), 51° (da soma $48^\circ + 3^\circ$) e tantos outros valores inteiros para ângulos agudos. Lembrando que as fórmulas aqui utilizadas são aplicáveis à quaisquer arcos, mas como as demonstrações foram restritas aos agudos, só utilizamos ângulos com essa característica.

45. (Extraído do Banco de Questões da OBMEP - 2015)

a) Observe que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(45^\circ - k) + 1 &= \frac{\operatorname{sen}(45^\circ - k)}{\operatorname{cos}(45^\circ - k)} + 1 \\ &= \frac{\operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{cos} k - \operatorname{cos} 45^\circ \operatorname{sen} k}{\operatorname{cos} 45^\circ \operatorname{cos} k + \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} k} + 1 \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cos} k - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} k}{\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cos} k + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} k} + 1 \\ &= \frac{\frac{\operatorname{cos} k}{\operatorname{cos} k} - \frac{\operatorname{sen} k}{\operatorname{cos} k}}{\frac{\operatorname{cos} k}{\operatorname{cos} k} + \frac{\operatorname{sen} k}{\operatorname{cos} k}} + 1 \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg} k}{1 + \operatorname{tg} k} + 1 \\ &= \frac{2}{1 + \operatorname{tg} k}. \end{aligned}$$

Consequentemente, $(\operatorname{tg}(45^\circ - k) + 1)(\operatorname{tg} k + 1) = 2$. ■

b) O item anterior nos permite agrupar os primeiros 44 termos do produto dado, através de pares da forma $(\operatorname{tg}(45^\circ - k) + 1)(\operatorname{tg} k + 1)$, em 22 produtos iguais a 2. Como $1 + \operatorname{tg} 45^\circ = 2$, segue que $2^n = 2^{23}$ e $n = 23$.