Problemas dos Círculos Matemáticos

Problemas extras para os capítulos 2 e 3

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Problemas dos Círculos Matemáticos - Capítulos 2 e 3
Problemas extras para os capítulos 2 e 3

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Ache no tabuleiro abaixo todos os múltiplos de 2 que não são múltiplos de 9.

111	178	9
150	66	54
77	153	162

Exercício 2. João e Maria estão bricando de misturar algarismos de dois números. A brincadeira funciona da seguinte forma: João escolhe um número de 4 algarismos e Maria um de 2 algarismos. Em seguida, Maria deve formar o maior número possível misturando os algarismos desses dois números e João deve formar o menor número possível fazendo o mesmo. Por exemplo, se João escolheu 5654 e Maria escolheu 75, então o maior número possível que ela pode formar é 756554 e o menor número que ele pode formar é o 565475 Agora eles mudaram de números: Maria escolheu 8760 e João escolheu 85

(a) Qual será o número de 6 dígitos formado por Maria?

(b) Qual será o número de 6 dígitos formado por João?

Exercício 3. Na soma abaixo, letras iguais representam dígitos iguais e letras diferentes dígitos diferentes.

$$\begin{array}{rrr} & & X \\ + & & X \\ & Y & Y \\ \hline Z & Z & Z \end{array}$$

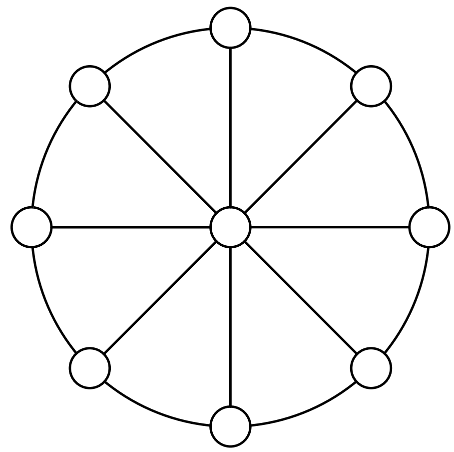
Qual o dígito representado pela letra X?

Exercício 4. Maria acaba de ganhar uma barra enorme de chocolate como presente de Páscoa. Ela decide dividi-la em pedaços para comê-la aos poucos. No primeiro dia, ela a divide em 10 pedaços e come apenas um deles. No segundo dia, ela divide um dos pedaços que sobraram do dia anterior em mais 10 pedaços e come apenas um deles. No terceiro dia, ela faz o mesmo, ou seja, divide um dos pedaços que sobraram do dia anterior em 10 outros e come apenas um deles. Ela continua repetindo esse procedimento até a Páscoa do ano seguinte.

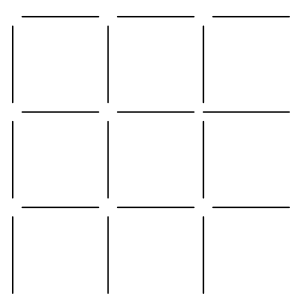
a) Quantos pedaços ela terá no final do terceiro dia?

b) É possível que ela obtenha exatamente 2014 pedaços em algum dia?

Exercício 5. Na figura abaixo, temos uma circunferência cortada por 4 segmentos. Escreva os números de 1 até 9 nos círculos de modo que a soma dos números escritos em cada segmento seja sempre a mesma.



Exercício 6. Na figura abaixo, Maria arrumou 24 palitos e formou um quadrado 3×3.

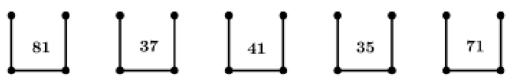


a) Quantos palitos ela precisaria usar para formar um quadrado 4×4?

b) Qual o lado do maior quadrado que ela conseguiria formar com 100 palitos? Se sobrarem palitos, determine quantos.

Exercício 7. João possui 30 barras de chocolate com os pesos: 2, 3 ou 4 quilos. A soma dos pesos das barras é 100 quilos. João possui mais barras de $2\,kg$ ou de $4\,kg$?

Exercício 8. Colorado Jones deve resolver um grande enigma para sobreviver. Ele deve remover apenas um dos cinco potes que estão na sua frente, como indica a figura abaixo, para poder abrir a porta da câmara secreta. Ele sabe que em cada pote existe apenas um tipo de moeda, ouro ou prata, e que cada número escrito neles representa a quantidade de moedas em seu interior. Além disto, o único pote correto que deve ser removido, faz com que nos potes restantes o número de moedas de prata seja o dobro do número de moedas de ouro. Qual pote deve ser removido?

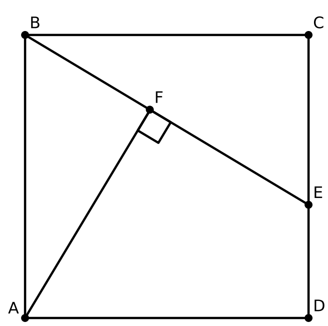


2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. De quantos modos podemos colocar 10 garotos e 10 garotas em uma fila de modo que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

Exercício 10. Cada um dentre os 102 estudantes em uma escola é amigo de pelo menos outros 68 estudantes. Prove que existem quatro estudantes que possuem o mesmo número de amigos.

Exercício 11. Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado de lado 12 e BE é um segmento de comprimento 16. Determine o comprimento do segmento AF.



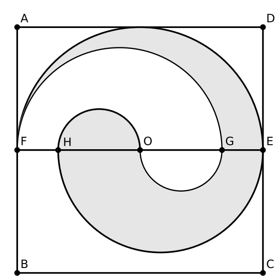
3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 12. Considere o conjunto $M = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$ e seu subconjunto A formado por todos os inteiros positivos da forma $m^2 + k^3$ com m e n também inteiros positivos. Quem tem mais elementos: A ou $M \backslash A$?

Exercício 13. Suponha que ABC seja um triângulo retâgulo escaleno, e P seja o ponto na hipotenusa AC tal que $\angle ABP = 45°$. Dado que $AP = 1$ e $CP = 2$, calcule a área do triângulo ABC.

Exercício 14. No triângulo ABC sabe-se que $\angle ACB = 90°$, $AC = 20$ e $AB = 101$. Seja D o ponto médio de BC. Ache a área do triângulo ADB.

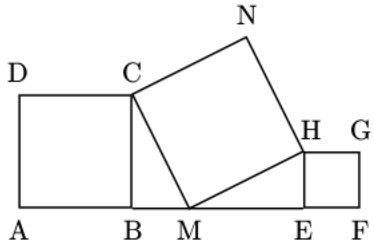
Exercício 15. Dado o quadrado $ABCD$ de lado 2. Sejam O o centro do quadrado e E e F os pontos médios dos lados AB e CD. Se os segmentos FH e GE são iguais e os arcos FE, EH, GO, OG, FG são semicircunferências, encontre a área sombreada.



Exercício 16. Seja n um inteiro positivo. Qual o resto da divisão do número $n^2 + 8n + 15$ por $n + 4$?

Exercício 17. É possível colocarmos 1995 números naturais ao redor de um círculo de modo que para quaisquer dois números vizinhos a razão entre o maior e o menor seja um número primo?

Exercício 18. Na figura abaixo $ABCD$ é um quadrado de área $64\,cm2$ e $EFGH$ um quadrado de área $36\,cm^2$. Determine a área do quadrado $CMHN$.



Respostas e Soluções.

1. Os múltiplos de 2 que não são múltiplos de 9 são: 150 e 66.

2.

a) 887650.

b) 858760.

3. Inicialmente note que $X + X + Z \leq 2 \cdot 9 + 8 = 26$. Portanto, será acrescentado na casa das dezenas no máximo 2 unidades. Como $Y \neq Z$, ao somarmos 1 ou 2 unidades a Y devemos obter o número de dois dígitos $\overline{ZZ}$. Como $Y + 2 \leq 9 + 2 = 11$, a única possibilidade é termos $\overline{ZZ} = 11$, assim, $Y = 9$. Para que a soma $2X + Y$ termine em 1 e tenha $X \neq 1$, devemos ter $X = 6$. De fato, esses valores satisfazem a soma:

$$\begin{array}{cccc} & & & 6 \\ + & & & 6 \\ & & 9 & 9 \\ \hline & 1 & 1 & 1. \end{array}$$

4.

a) No final do primero dia, ela terá $10 - 1 = 9$ pedaços. No final do dia seguinte, ela terá $9 - 1 + 10 - 1 = 17$ pedaços. Do ponto de vista prático, é como se ela tivesse acrescentado $10 - 1 - 1 = 8$ pedaços novos, pois um pedaço sempre é perdido para a divisão em 10 e outro sempre é comido. No final do terceiro dia ela acrescenta mais oito novos pedaços e passa a ter 25.

b) Como a soma sempre aumenta de 8 em 8, após n dias, a partir do dia inicial, ela terá $9 + 8n$ pedaços. Se for possível obter exatamante 2014 pedaços, devemos ter:

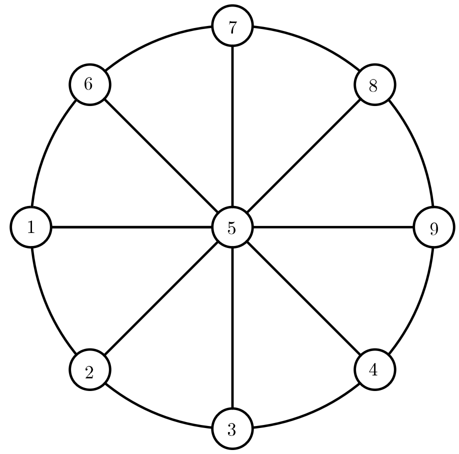
$$\begin{aligned} 9 + 8n &= 2014 \\ n &= \frac{2005}{8}. \end{aligned}$$

Como $\frac{2005}{8}$ não é inteiro, tal dia nunca acontecerá.

5. Observe que as somas dos números em círculos diametralmente opostos devem ser iguais pois todos os segmentos compartilham o círculo central. Desconsiderando-se o centro, a soma dos oito números escritos na circunferência deve ser divisível por 4, pois eles podem ser distribuídos em 4 pares de mesma soma. A soma total é

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

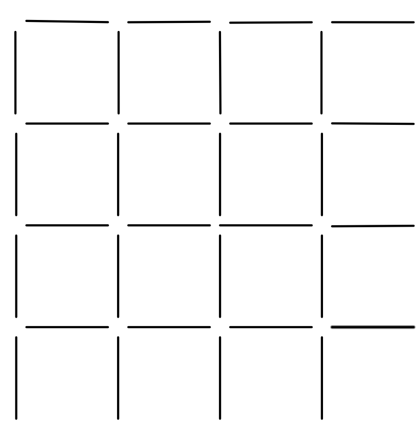
Escolhendo-se o 5 como número central, os outros números podem ser distribuídos nos seguintes pares de soma 10: $(1, 9)$, $(2, 8)$, $(3, 7)$ e $(4, 6)$. Uma possível distribuição seria:



Observação: Além do 5, os números 9 e 1 também poderiam ocupar o centro, pois $45 - 9 = 36$ e $45 - 1 = 44$ também são múltiplos de 4. Para colocarmos o 9 no centro, bastaria dividirmos os números restantes nos pares de soma $36/4 = 9$: $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$ e $(4, 5)$. Para colocarmos o 1 no centro, bastaria dividirmos os números restantes nos pares de soma $44/4 = 11$: $(2, 9)$, $(3, 8)$, $(4, 7)$ e $(5, 6)$.

6.

a) A figura abaixo mostra que ela precisará usar 40 palitos



b) Se quisermos formar um quadrado com o lado composto por n palitos, precisaremos de $n+1$ linhas de n palitos e $n+1$ colunas também de n palitos. Isso totaliza $n(n+1)+n(n+1)=2n(n+1)$ palitos. Então, se

$$\begin{aligned} n=5 &\Rightarrow 2n(n+1)=60;\\ n=6 &\Rightarrow 2n(n+1)=84;\\ n=7 &\Rightarrow 2n(n+1)=112.\end{aligned}$$

Portanto, com 100 palitos, podemos formar no máximo um quadrado com lado 6 e sobrarão $100-84=16$ palitos.

7. Sejam x, y e z as quantidades de barras de $2Kg$, $3Kg$ e $4Kg$, respectivamente. Sabemos que:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 30\\ 2x+3y+4z &= 100.\end{aligned}$$

Se multiplicarmos a primeira equação por 3 e a subtrairmos da segunda, obteremos

$$z-x = 10$$

Como $z-x>0$, segue que temos mais barras de $4Kg$ do que barras de $2Kg$.

8. A retirada de um dos potes deve permitir que Colorado Jones consiga separar os restantes em dois grupos, sendo que em um desses grupos existe o dobro de moedas do outro grupo. Se a quantidade de moedas do menor grupo é x, a soma das moedas dos dois grupos é $x+2x=3x$. Portanto, já sabemos pelo menos que a retirada do pote correto faz a quantidade de moedas restantes ser um múltiplo de 3. A soma das quantidades de moedas dos cinco potes é $81+71+41+37+35=265$, que deixa resto 1 na divisão por 3. Consequentemente, para que a remoção de um pote torne essa quantidade múltipla de 3, o mesmo deve deixar resto 1 por 3. Dos números apresentados, apenas 37 possui tal propriedade. Além disso, veja que ao retirá-lo, os potes restantes podem ser divididos de dois grupos: um com soma $81+71=2\cdot 76$ e outro com soma $35+41=76$. Assim, Colorado Jones deve remover o pote de 37 moedas.

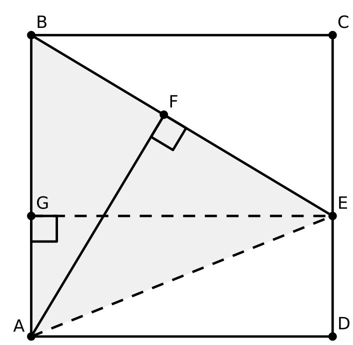
9. Considerando apenas o sexo de cada pessoa, existem duas distribuições possíveis para garantir a alternância, a saber, ou começamos com um garoto ou com uma garota e as posições restantes ficam determinadas. Feita essa escolha, existem 10! possíveis distribuições dos garotos e, para cada uma dessas distribuições, existem 10! distribuições das garotas. Assim, pelo princípio multiplicativo, existem $2\cdot 10!\cdot 10!$ escolhas.

10. Quando somamos a quantidade de amigos dos estudantes da escola obtemos um número par, pois cada relação de amizade é contada duas vezes. Isso implica na existência de uma quantidade par de alunos com um número ímpar de amigos. Cada estudante de uma escola possui seu número de amigos pertencente ao conjunto $A=\{68,69,\ldots,101\}$. Como existem 102 pessoas e 34 opções para seus números de amigos, se supusermos que não existem quatro com o mesmo número de amigos teremos que cada elemento de A está associado à exatamente 3 pessoas. Nesse caso o número de pessoas que possui um número ímpar de amigos é um número ímpar, isso é absurdo.

11. A área do triângulo ABE é $\dfrac{AB\cdot GE}{2}=72$. Assim, aplicando a mesma fórmula de área para a base BE e a altura AF, temos:

$$72=\frac{AF\cdot BE}{2}=\frac{AF\cdot 9}{2}=4,5AF.$$

Portanto, o comprimento de AF é $\dfrac{72}{4,5}=16.$



12. (Extraído da Olimpíada Russa) Como m e k são inteiros positivos e $m^2+k^3\leq 10^6$, existem no máximo 10^3 possibilidades para m e 10^2 possibilidades para k. Assim, o conjunto A possui menos que $10^3\cdot 10^2=10^5$ elementos, pois nem todos os pares (m,k) com $1\leq m\leq 10^3$ e $1\leq k\leq 10^2$ satisfazem $m^2+k^3\leq 10^6$. Por exemplo, $(m,k)=(10^3,10^2)$ não satisfaz isso. Assim, o complementar de A possui mais que $10^6-10^5=9\cdot 10^5$ elementos. Como $10^5<9\cdot 10^5$, segue que o complementar de $M\backslash A$ possui mais elementos que A.

13. Sejam Q o ponto pertencente a BC tal que $PQ\parallel AB$ e $PQ=z$. Note que o triângulo BPQ é isósceles, pois $\angle PBQ=\angle BPQ=45°$. Pelo Teorema de Tales, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \frac{x}{z} &= \frac{3}{2} \\ z &= \frac{2x}{3} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{y}{y-z} &= \frac{3}{2} \\ 2y &= 3y - 3z \\ y &= 3z \end{aligned}$$

Assim, $y = 2x$. Agora, pelo Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, podemos concluir que:

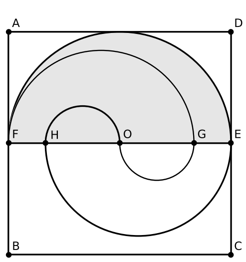
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (1+2)^2 \\ x^2 + 4x^2 &= 9 \\ x^2 &= \frac{9}{5} \end{aligned}$$

Portanto, temos que área do triângulo ABC é igual a:

$$\frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot 2 \cdot x}{2} = x^2 = \frac{9}{5}$$

14. Aplicando Teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$, temos que: $BC = \sqrt{(101^2 - 20^2)} = \sqrt{(101+20)\cdot(101-20)} \Rightarrow BC = 99$. Analisando agora o triângulo ADB, de base DB e altura AC, temos: $[ADB] = \dfrac{\frac{99}{2}\cdot 20}{2}$. Portanto, $[ADB] = 495$.

15. Como $FH = GE$, temos $HO = FO - FH = OE - GE = OG$. Consequentemente o semicírculo de diâmetro HO possui a mesma área do semicírculo de diâmetro OG. Além disso, a área entre os arcos FG e HO é igual à área entre os arcos GO e HE. Consequentemente, a área procurada corresponde a área de um semicírculo de diâmetro FE. Como o raio do semicírculo de diâmetro FE mede 1, a área sombreada mede $\dfrac{2^2\pi}{2} = 2\pi$.



16. Como $n^2 + 8n + 15 = (n+3)(n+4) + (n+3)$ e $0 \leq n+3 < n+4$, segue que o resto é $n+3$.

17. (Extraído da Olimpíada Russa) Suponha, por absurdo, que isso seja possível e denotemos por $a_0, a_1, \ldots, a_{1995} = a_0$ tais inteiros. Então, para $k = 1, \ldots, 1995$, $\frac{a_{k-1}}{a_k}$ é primo ou o inverso de um primo. Suponha que a primeira situação ocorra m vezes e a segunda ocorra $1995 - m$ vezes entre esses quocientes. Como o produto de todos os números da forma $\frac{a_{k-1}}{a_k}$, para $k = 1, \ldots, 1995$ é igual a 1, podemos concluir que o produto de m primos deve ser igual ao produto de $1995 - m$ primos. Em virtude da fatoração única, $m = 1995 - m$. Um absurdo, pois 1995 é ímpar.

18. (Extraído da OBM) Analisando os ângulos da figura, temos:

$$\begin{aligned} \angle BCM &= 90^\circ - \angle BMC \\ &= 90^\circ - (180^\circ - 90^\circ - \angle HME) \\ \angle BCM &= \angle HME \end{aligned}$$

Como $\angle CBM = \angle MEH = 90^\circ$ e $CM = MH$ temos $\triangle CBM \equiv \triangle MEH$. Sejam x, y, z os lados dos quadrados $ABCD$, $EFGH$, $CMHN$, respectivamente. Daí, podemos concluir que: $x^2 = 64cm^2$ e $y^2 = 36cm^2$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle CBM$, obtemos

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + BM^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= 64cm^2 + 36cm^2 \\ &= 100cm^2 \end{aligned}$$

Portanto, a área do quadrado $CMHN$ é igual a $100cm^2$.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com