Módulo Resolução de Exercícios

Operações com Números Naturais

6° ano E.F.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Resolução de Exercícios
Operações com Números Naturais

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Augusto estuda matemática somente nos dias ímpares. Em outubro, quantos dias Augusto estudou matemática?

Exercício 2. Uma tabela tem 60 quadradinhos e é preenchida apenas com os números pares em ordem crescente. Veja o início:

2	4	6
8	10	12
14	16	18
20	22	24
...	...	...

Como será composta a última linha?

Exercício 3. Uma professora levou muitos exercícios de matemática para seus 26 alunos. Então ela sorteou o primeiro aluno, Alberto, que recebeu 1 exercício para fazer; depois ela sorteou outro aluno, Beto, que recebeu 2 exercícios; e assim por diante, até que ela sorteou o último aluno, Ziraldo, que recebeu 26 exercícios. Quantos exercícios a professora distribuiu ao todo?

Exercício 4. Qual a quantidade máxima de domingos que podemos ter em um ano?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Determine o algarismo das unidades do resultado das somas:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + 9^2 + 10^2$.

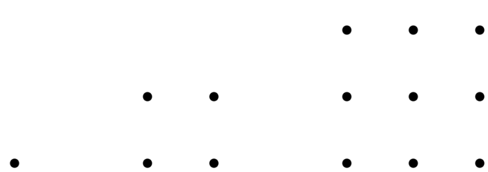
b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + 99^2 + 100^2$.

Exercício 6. Rita escreve a sequência formada por números de três algarismos não nulos a seguir.

123, 234, 345,..., 789, 891, 912, 123, 234,...

Qual é o 2013^o termo dessa sequência?

Exercício 7. Observe a sequência de figuras:



$Figura 1$ $Figura 2$ $Figura 3$

Qual a quantidade de pontinhos:

a) da *Figura*10?

b) da *Figura*1 até a *Figura*10?

Exercício 8. A figura abaixo mostra a tela de segurança de um *smartphone*. Para gerar uma senha, deve-se escolher 3 números em sequência. Quantas senhas diferentes podem ser formadas de forma que os 3 números estejam em linhas e em colunas diferentes?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Exercício 9. Na adição de termos iguais:

$$2013^{2013} + 2013^{2013} + ... + 2013^{2013} = 2013^{2014},$$

escrita de forma simplificada, foram escritos muitos sinais de adição $(+)$. Quantos foram escritos?

a) 1006.

b) 2009.

c) 2012.

d) 2014.

e) 4026.

Exercício 10. Qual o algarismo das unidades de N, sendo:

$$N = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 22 \cdot ... \cdot 98?$$

Exercício 11. Um famoso jogo chamado Campo Minado consiste em abrir as casas (quadradinhos) de um tabuleiro quadrangular sem abrir as casas que contêm bombas. As casas que não possuem bomba, possuem um número que indica o número de quadradinhos vizinhos (com um lado ou um vértice em comum) que possuem bomba. Abaixo temos um tabuleiro $5x5$ de Campo Minado com algumas casas abertas. As casas em branco são casas que ainda não foram abertas. Abrindo todas as casas deste tabuleiro, qual a soma de todos os números das casas que não contêm bomba?

			1	
2		2	2	
1	2		4	
	1	2		
		1	3	

Exercício 12. Uma praça circular é rodeada de casas. Ana e Pedro saíram de casas diferentes e deram uma volta ao redor da praça, no mesmo sentido, contando as casas pelas quais iam passando. A quinta casa contada por Ana foi a décima segunda de Pedro e a vigésima de Ana foi a quinta de Pedro. Quantas casas existem em volta da praça?

a) 22.

b) 25.

c) 28.

d) 31.

e) 34.

Exercício 13. O número 38 é dividido em duas parcelas. A maior parcela dividida pela menor dá quociente 4 e resto 3. Achar o produto dessas duas partes.

a) 240.

b) 136.

c) 217.

d) 105.

e) 380.

Exercício 14. A metade e o dobro do número 26 são números naturais de dois algarismos. Quantos são os números naturais que possuem essas mesmas propriedades?

a) 15.

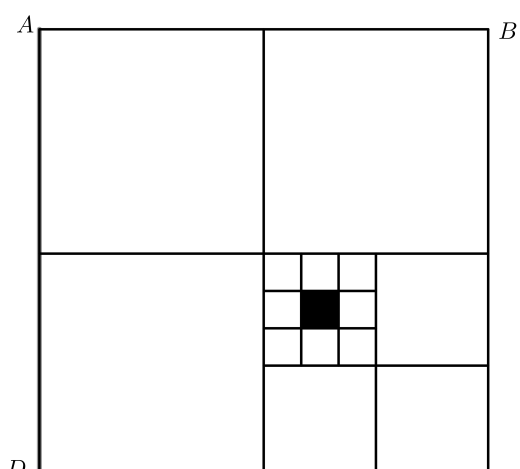
b) 18.

c) 20.

d) 22.

e) 25.

Exercício 15. A figura apresenta quadrados de quatro tamanhos diferentes. A área do pequeno quadrado preto é $1cm^2$. Qual é a área do quadrado maior $ABCD$?



a) $36cm^2$.

b) $72cm^2$.

c) $108cm^2$.

d) $144cm^2$.

e) $180cm^2$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. Para registrar o resultado da operação $2^{101} \cdot 5^{97}$, o número de dígitos necessários é:

a) 96.

b) 97.

c) 98.

d) 99.

e) 100.

Exercício 17. Jaci entrega jornais numa rua na qual os números das casas têm exatamente dois algarismos e ambos são ímpares, como por exemplo, 37. No domingo passado ela entregou jornais em 18 casas. No máximo, quantas casas não receberam jornal?

a) 1.

b) 3.

c) 5.

d) 7.

e) 9.

Exercício 18. Janaína escreveu uma lista de 10 números inteiros positivos no quadro-negro e obteve todas as somas possíveis de dois desses números, verificando que todas eram diferentes. O número de somas pares que ela obteve era igual a quatro vezes o número de somas ímpares. Qual é a maior quantidade de números pares que poderia haver na lista de Janaína?

a) 1.

b) 3.

c) 5.

d) 7.

e) 9.

Exercício 19. Na igualdade $\dfrac{DxOxZxE}{DxOxIxS} = SxExIxS$, letras iguais representam algarismos iguais e letras diferentes representam algarismos diferentes. Se os algarismos são todos diferentes de zero, quantos valores diferentes o produto $SxExIxS$ pode ter?

a) 12.

b) 18.

c) 22.

d) 28.

e) 36.

Exercício 20. Sem usar o algarismo 0, Carolina escreveu todos os números de três algarismos diferentes nos quais o algarismo do meio é maior do que os outros dois. Por exemplo, Carolina escreveu 241, mas não escreveu 570, nem 464, nem 123.

a) Quais são os números que Carolina escreveu com o algarismo do meio igual a 3?

b) Quantos números Carolina escreveu com o algarismo do meio igual a 7?

c) Quantos números Carolina escreveu ao todo?

Exercício 21. Um número natural de 6 algarismos começa, à esquerda, pelo algarismo 1. Levando-se este algarismo, para o último lugar, à direita, conservando a sequência dos demais algarismos, o novo número é o triplo do número primitivo. O número primitivo é:

a) 100.006.

b) múltiplo de 11.

c) múltiplo de 4.

d) múltiplo de 180.000.

e) divisível por 5.

Respostas e Soluções.

1. Outubro tem 31 dias. Do dia 1 ao dia 30, são 30 dias, dos quais metade são pares e metade são ímpares. Como o dia 31 é ímpar, Augusto estudou matemática 16 dias de outubro.

2. São 60 números, sendo todos pares, então o primeiro é 2, o segundo é 4, o terceiro é 6, ou seja, o número de um determinado quadrado é o dobro do número que representa a posição desse quadrado. Então a última linha, cujos quadrados ocupam as posições 58, 59, e 60, serão preenchidos pelos números $2 \cdot 58 = 116$, $2 \cdot 59 = 118$ e $2 \cdot 60 = 120$.

...	...	...
116	118	120

3. Basta somarmos os naturais de 1 a 26:

$$\begin{aligned} \frac{(1+26)\cdot 26}{2} &= \\ \frac{27 \cdot 26}{2} &= \\ 27 \cdot 13 &= 351. \end{aligned}$$

Portanto, foram distribuídos 351 exercícios.

4. Vamos analisar a situação mais "vantajosa", ou seja, vamos tomar um ano bissexto, 366 dias, e supor que ele comece em um domingo. Temos então que 366 dividido por 7 nos dá quociente 52 e resto 2. Assim, o número máximo de domingos em um ano são $52 + 1 = 53$.

5.

a)

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + 9^2 + 10^2 &= \\ 1 + 4 + 9 + 16 + ... + 81 + 100 &= 385. \end{aligned}$$

Portanto, o algarismo das unidades da soma é 5.

b) Repetindo o processo do item anterior, mas dividindo em 10 grupos de somas: 1^2 ao 10^2; 11^2 ao 20^2; e assim por diante. Teremos então 10 resultados que tem o 5 como algarismo das unidades. Somando esses 10 resultados, teremos um número terminado em 0.

6. (Extraído da OBM - 2013/Vídeo Aula) Vemos que são três algarismos consecutivos e em ordem crescente, com exceção de 891 e 912. Podemos perceber também que os primeiros algarismos de cada termo formam uma sequência de 1 a 9 que se repete. Assim, na divisão de 2013 por 9, temos resto 6, o que implica que o primeiro algarismo do termo 2013 é 6, segue que esse termo é 678.

7.

a) A *Figura*1 tem 1 ponto; a *Figura*2 tem 4 pontos; a *Figura*3 tem 9 pontos; e assim por diante, ou seja, a quantidade de pontos é o quadrado da posição da figura. Sendo assim, a *Figura*10 tem $10^2 = 100$ pontos.

b) $1 + 4 + 9 + 16 + ... + 100 = 385$.

8. Se escolhermos a tecla 1 da primeira linha, só poderemos escolher os pares 5 e 9 ou 6 e 8, ou seja, serão dois conjuntos com 3 números. O mesmo ocorre se escolhermos a tecla 2 ou 3 na primeira linha. Temos então 6 conjuntos com 3 números. Mas cada um desses 6, tem 6 combinações diferentes, por exemplo o conjunto formado por 1, 5 e 9 gera as senhas 159, 195, 519, 591, 915 e 951. Assim, podemos gerar $6 \cdot 6 = 36$ senhas diferentes.

9. (Extraído da OBM - 2013/Vídeo Aula) Como $2013^{2014} = 2013 \cdot 2013^{2013}$, a expressão contém 2013 parcelas 2013^{2013}, sendo necessários 2012 sinais de adição. Resposta C.

10. Como $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 384$ tem algarismo das unidades igual a 4, todos os produtos de quatro números cujos algarismos das unidades são 2, 4, 6 e 8, terão um resultado com algarismo das unidades igual a 4. Como N é o produto de 10 dessas sequências, o algarismo das unidades é o algarismos das unidades de 4^{10}, que é igual a 6.

11. Abrindo todas as casas do tabuleiro e representando as bombas por X, temos:

X	2	1	1	1
2	X	2	2	X
1	2	X	4	3
0	1	2	X	X
0	0	1	3	X

Portanto, a soma dos números das casas sem bomba é $2 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 4 + 3 + 0 + 1 + 2 + 0 + 0 + 1 + 3 = 28$.

12. (Extraído da OBMEP - 2016) Da 5^a casa contada por Pedro até a 12^a, foram 8 casas contadas. Estas casas foram, respectivamente, a 20^a e a 5^a de Ana. Então, da 20^a até a 5^a devem existir 8 casas: de 1 a 5 são 5 e como faltam 3, são 20, 21 e 22. Ou seja, são 22 casas ao todo. Resposta A.

13. (Extaído do Colégio Naval/Vídeo Aula) Se o quociente é 4 e o resto é 3, vamos subtrair 3 da maior parcela para que não sobre resto, consequentemente dividiremos 35 em duas parcelas. Como uma é o quádruplo da outra, elas são 28 e 7. Então as duas iniciais são $28 + 3 = 31$ e 7, sendo seu produto igual a $7 \cdot 31 = 217$. Resposta C.

14. (Extraído da OBMEP - 2016) Vamos supor que os três números sejam a, b e c, sendo a a metade de b e c o dobro de b. Mas se c é o dobro de b, que por sua vez é o dobro de a, então c é o quádruplo de b. Basta agora procurarmos todos os números de dois algarismos cujo dobro e quádruplo também têm dois algarismos: 10, 11, 12, ..., 24. Portanto, são 15 números. Resposta A.

15. (Extraído da OBM - 2016) Em ordem crescente de tamanho, vamos chamar os quadrados de I, II, III e IV. São 9 quadradinhos do tipo I, cuja área é $1cm^2$. Cada quadrado do tipo II, tem 9 vezes a área do quadrado do tipo I, ou seja, cada um tem área $9cm^2$; cada quadrado do tipo III tem área

4 vezes maior que a área do quadrado do tipo II, ou seja, $4 \cdot 9 = 36cm^2$; por fim, o quadrados do tipo IV, $ABCD$, tem área 4 vezes maior que a do quadrado do tipo III, ou seja, $4 \cdot 36 = 144cm^2$. Resposta D.

16. (Extraído do Colégio Naval/Vídeo Aula) Vamos melhorar a expressão:

$$\begin{aligned} 2^{101} \cdot 5^{97} &= \\ 2^4 \cdot 2^{97} \cdot 5^{97} &= \\ 16 \cdot 10^{97} &= 16\underbrace{00...00}_{97 zeros}. \end{aligned}$$

Portanto, são $2 + 97 = 99$ dígitos. Resposta D.

17. (Extraído da OBM - 2016) Como os números das casas são formados por dois algarismos ímpares, o máximo de casa que existe na rua é $5 \cdot 5 = 25$. Assim, o número máximo de casas que não recebeu jornal foi $25 - 18 = 7$. Resposta D.

18. (Extraído da OBM - 2016) Se ela somou dois a dois os 10 números, então o total de somas que obteve foi $9 + 8 + 7 + ... + 1 = 45$, das quais 9 são ímpares e 36 são pares. Se todos os números forem pares, todas as somas também serão pares, mas se apenas um dos números for ímpar, as somas que o envolverem, 9, serão ímpares e as demais, 36, serão pares. Assim, a maior quantidade de números pares escritos é 9. Resposta E.

19. (Extraído da OBM - 2016) Como todos os algarismos são não nulos, podemos simplificar a igualdade, cancelando os termos repetidos e obtendo $Z = S^3 \cdot I^2$. Como Z é um algarismo, temos que $S = 1$ ou $S = 2$. No primeiro caso, $I^2 = 4$ ou $I^2 = 9$. No segundo caso, a única opção é $I^2 = 1$. Assim, as possibilidades são: $(S, I) = (1, 2), (1, 3)$ ou $(2, 1)$. Dado que E é diferente de I e S, temos 7 opções para a sua escolha. Vejamos numa tabela quais os possíveis produtos $P = SxExIxS$ e de Z oriundos destas escolhas.

S	I	E	P	Z	S	I	E	P	Z	S	I	E	P	Z
1	2	3	6	4	1	3	2	6	9	2	1	3	12	8
1	2	4	8	4	1	3	4	12	9	2	1	4	16	8
1	2	5	10	4	1	3	5	15	9	2	1	5	20	8
1	2	6	12	4	1	3	6	18	9	2	1	6	24	8
1	2	7	14	4	1	3	7	21	9	2	1	7	28	8
1	2	8	16	4	1	3	8	24	9	2	1	8	32	8
1	2	9	18	4	1	3	9	27	9	2	1	9	36	8

Da tabela, excluindo as combinações que fazem Z ser uma das letras já escolhidas, podemos concluir que existem 12 valores distintos para P: 6, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28 e 36. Resposta A.

20. (Extraído da OBMEP - 2016)

a) 132 e 231.

b) Se o algarismo do meio é 7, então o algarismo das centenas pode ser 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, ou seja 6 possibilidades, enquanto que para as unidades restam apenas 5 possibilidades, já que devem ser todos diferentes. Temos então $6 \cdot 5 = 30$ números.

c) O menor algarismo do meio deve ser 3. Usando o raciocínio do item anterior, temos $2 \cdot 1 = 2$ com o 3 no meio; $3 \cdot 2 = 6$, com o 4 no meio; $4 \cdot 3 = 12$, com o 5 no meio; $5 \cdot 4 = 20$, com o 6 no meio; $6 \cdot 5 = 30$, com o 7 no meio; $7 \cdot 6 = 42$, com o 8 no meio; e $8 \cdot 7 = 56$, com o 9 no meio. Portanto, são ao todo $2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56 = 168$.

21. (Extraído do Colégio Naval/Vídeo Aula) A operação inicial é:

$$\begin{array}{r} 1\square\square\square\square\square \\ \text{x} \qquad\quad 3 \\ \hline \square\square\square\square\square 1 \end{array}$$

Para que o produto de um algarismo por 3 termine em um, este algarismo deve ser 7:

$$\begin{array}{r} 1\square\square\square\square 7 \\ \text{x} \qquad\quad 3 \\ \hline \square\square\square\square 71 \end{array}$$

Temos agora que $3 \cdot 7 = 21$, então "sobem"2 para a casa seguinte. Isso significa que o triplo da casa das dezenas deve terminar em 5, e isso só ocorre para 5 nesta casa:

$$\begin{array}{r} 1\square\square\square 57 \\ \text{x} \qquad\quad 3 \\ \hline \square\square\square 571 \end{array}$$

Agora, se $3 \cdot 5 + 2 = 17$, "sobe"1 para o próximo produto, então o triplo de um algarismo deve terminar em 4, segue que esse algarismo é 8:

$$\begin{array}{r} 1\square\square 857 \\ \text{x} \qquad\quad 3 \\ \hline \square\square 8571 \end{array}$$

Como $3 \cdot 8 + 1 = 25$, "sobem"2, então o triplo de um algarismo deve terminar em 6. Este algarismo é 2:

$$\begin{array}{lr} & 1\square2857 \\ \text{x} & 3 \\ \hline & \square28571 \end{array}$$

Por fim, temos que o último algarismo é 4, pois $3 \cdot 4 = 12$, termina em 2:

$$\begin{array}{lr} & 142857 \\ \text{x} & 3 \\ \hline & 4285711 \end{array}$$

Temos então que o número primitivo, 142857, é múltiplo de 11. Resposta B.

ELABORADO POR CLEBER ASSIS E TIAGO MIRANDA
PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM