Módulo de Matrizes e Sistemas Lineares

Operações com Matrizes

Matrizes e Sistemas Lineares
Operações com Matrizes

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Se

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Encontre o valor de

(a) $2 \cdot A$.

(b) $1/2 \cdot A$.

(c) $-3 \cdot A$.

Exercício 2. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine

a) $A + B$.

b) $A - B$

c) $A \cdot B$.

Exercício 3. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Determine o valor de $A + B + C$.

Exercício 4. Se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

determine o valor de

$$I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{100}.$$

Exercício 5. Determine os produtos de matrizes:

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercício 6. Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determine A^2.

(b) Determine A^3

(c) Determine A^n, para $n \in \mathbb{N}$

Exercício 7. Determine a, b, c e d tais que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercício 8. Determine x e y de modo que as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} y & -1/2 \\ -2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

satisfaçam $AB = BA$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Considere as matrizes quadradas $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3\times 3}$ que satisfazem

$$a_{ij} = i^2 + j^2 \text{ e } b_{ij} = 2ij.$$

Determine a soma dos elementos da diagonal principal de $A + B$.

Exercício 10. Determine x e y de modo que

$$\begin{pmatrix} 1 & 3x \\ y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ x & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercício 11. Determine x e y de modo que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Exercício 12. Encontre uma matriz $A = (a_{ij})_{2\times 2}$, com coeficientes reais, tal que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Exercício 13. As matrizes $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3\times 3}$ satisfazem $a_{ij} = ij$ e $b_{ij} = \dfrac{j}{i}$. Determine a matriz $C = A \cdot B$.

Exercício 14. Se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determine A^4.

Exercício 15. Se $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ é uma matriz tal que $A^2 = 0$, determine o $a_{11} + a_{22}$.

Exercício 16. Determine o valor de $abcd$ se as matrizes

$$\begin{pmatrix} a+b & c+d \\ a-b & c-d \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

são iguais.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 17. Se

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

determine A^n, para $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 18. Prove que se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem com $AB = BA$ então

(a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(b) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$.

(c) $(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i}$.

Exercício 19. Determine todas as matrizes com coeficientes reais que comutam com

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Exercício 20. Prove que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

satisfaz a equação $x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0$.

Exercício 21. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e o polinômio $p(x) = x^{2016} + x^{2017}$, determina os elementos da matriz $p(A)$.

Exercício 22. Considere a sequência de Fibonacci definida por:

$$F_0 = F_1 = 0 \text{ e } F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

mostre que se $n \in \mathbb{N}$, então

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Respostas e Soluções.

1.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -18 & -12 \end{pmatrix}$$

(c)

2. Temos

a) $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$

b) $A - B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 14 & -10 \end{pmatrix}.$

3. Temos

$$\begin{aligned} A + B + C &= \begin{pmatrix} 1+4+10 & 2+5+2 & 3+6+3 \\ 2+1+1 & -2+2+4 & 7+3+5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 15 & 9 & 12 \\ 4 & 4 & 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Perceba que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{100} &= \\ I + A + A^2 &= \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 22 & -6 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 & 10 & 13 \\ 14 & -4 & -6 & -4 \\ 4 & 4 & 12 & 22 \\ -11 & 10 & 23 & 34 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6.

(a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Suponha que para $k \in \mathbb{N}$, tenhamos

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Então

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$

7. A multiplicação das duas primeiras matrizes produz

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a-2c & 2b-2d \end{pmatrix}.$$

Portanto, precisamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} a+2c=5 \\ b+2d=7 \\ 2a-2c=-2 \\ 2b-2d=-2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior, encontramos $a = 1$, $b = 5/3$, $c = 2$ e $d = 8/3$.

8. Temos

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & -1/2 \\ -2 & 3/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3y-2 & 0 \\ 4y-2x & -2+3x/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$BA = \begin{pmatrix} 3y-2 & y-x/2 \\ 0 & -2+3x/2 \end{pmatrix}.$$

Para que ocorra a igualdade, devemos ter $4y - 2x = 0$ e $y - x/2 = 0$. Essas equações são equivalentes e assim para qualquer par (x, y) com $x = 2y$ occorre a igualdade.

9. Se c_{ij} denota as entradas da matriz soma, temos

$$\begin{aligned} c_{ij} &= i^2 + j^2 + 2ij \\ &= (i+j)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} c_{11} + c_{22} + c_{33} &= 2^2 + 4^2 + 6^2 \\ &= 56. \end{aligned}$$

10. A soma das matrizes é igual a

$$\begin{pmatrix} 1 & 3x+2y \\ x+y & 4 \end{pmatrix}.$$

Para que ocorra a igualdade, devemos ter

$$\begin{cases} 3x+2y=8 \\ x+y=3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior, obtemos $x = 2$ e $y = 1$.

11. O produto das duas primeiras matrizes é

$$\begin{pmatrix} 2x+y \\ 3x+4y \end{pmatrix}.$$

Queremos que

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x+4y=7 \end{cases}$$

A solução desse sistema é $(x, y) = (1, 1)$.

12. O produto das duas primeiras matrizes é

$$\begin{pmatrix} a_{11}+2a_{12} \\ a_{21}+2a_{22} \end{pmatrix}.$$

Queremos que

$$\begin{cases} a_{11}+2a_{12}=4 \\ a_{21}+2a_{22}=5 \end{cases}$$

Uma solução do sistema anterior é $a_{11} = 4$ e $a_{21} = 5$. A solução geral é

$$(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) = (4 - 2t, t, 5 - 2k, k),$$

com t e k reais.

13. Se c_{ij} são as entradas da matriz C, então

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} \\ &= i \cdot j + i \cdot j + i \cdot j \\ &= 3ij \\ &= 3a_{ij} \end{aligned}$$

Portanto, $C = 3A$.

14. Podemos encontrar as potências de A recursivamente

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A^3 &= A^2 \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A^4 &= A^3 \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

15. Se c_{ij} denotam as entradas da matriz A^2, então

$$\begin{aligned} 0 - 0 &= c_{11} - c_{22} \\ &= a_{11}^2 - a_{22}^2 \end{aligned}$$

Portanto, $a_{11} = \pm a_{22}$. Se $a_{11} = -a_{22}$, então $a_{11} + a_{22} = 0$. Consideremos agora o caso $a_{11} = a_{22}$ com $a_{11} \neq 0$. Analisando as entradas c_{12} e c_{21}, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= c_{12} \\ &= 2a_{11} \cdot a_{21} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= c_{21} \\ &= 2a_{11} \cdot a_{12} \end{aligned}$$

Como $a_{11} \neq 0$, então $a_{12} = a_{21} = 0$. Logo, A^2 é uma matriz diagonal de entradas a_{11}^2 e $a_{22}^2 = a_{11}^2$. Isso implica que $a_{11} = 0$ e temos um absurdo. Consequentemente, $a_{11} + a_{22} = 0$.

16. Como as mmatrizes são iguais, podemos construir o sistema

$$\begin{pmatrix} a + b = 5 \\ c + d = 3 \\ a - b = 3 \\ c - d = -1 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema anterior, obtemos $a = 4$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 2$. Assim, $abcd = 8$.

17. Suponha que dado $k \in \mathbb{N}$ tenhamos

$$A^k = \begin{pmatrix} \cos k\alpha & \operatorname{sen} k\alpha \\ -\operatorname{sen} k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} \cos k\alpha & \operatorname{sen} k\alpha \\ -\operatorname{sen} k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\alpha & \operatorname{sen}(k+1)\alpha \\ -\operatorname{sen}(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto,

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \operatorname{sen} n\alpha \\ -\operatorname{sen} n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}..$$

para todo $n \in \mathbb{N}$

18.

(a) Pela propriedade de distributividade e da relação $AB = BA$, temos

$$\begin{aligned} (A + B)(A + B) &= \\ A^2 + AB + BA + B^2 &= \\ A^2 + 2AB + B^2. & \end{aligned}$$

(b) Pela propriedade de distributividade e da relação $AB = BA$, temos

$$\begin{aligned} (A+B)(A-B) &= \\ A^2 + BA - AB - B^2 &= \\ A^2 - B^2. \end{aligned}$$

(c) Suponha que para $k \in \mathbb{N}$ tenhamos

$$(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$$

Portanto, pela propriedade de distributividade, temos

$$\begin{aligned} (A+B)^{k+1} &= (A+B) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^{i+1} B^{k-i} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B A^i B^{k-i} \end{aligned}$$

Como $AB = BA$, segue que $BA^iB^{k-i} = A^iB^{k+1-i}$. Além disso, pela relação de Stifel,

$$\binom{k}{l-1} + \binom{k}{l} = \binom{k+1}{l}$$

Assim, o somatório anterior pode ser reorganizado, fazendo $i = l - 1$, como

$$\sum_{l=0}^{k+1} \binom{k+1}{l} A^l B^{k+1-l}$$

Isso mostra que a fórmula dada também serve para $k+1$. Segue que valerá para todo $n \in \mathbb{N}$.

19. Suponha que

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

comuta com K, então

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} &= TK \\ &= KT \\ &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Uma condição necessária e suficiente para que elas comutem é que

$$\begin{cases} a &= a+c \\ a+b &= b+d \\ c+d &= d \end{cases}$$

Portanto $c = 0$ e $a = d$. Daí, as matrizes que comutam com K são as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

com a e b reais.

20.

$$\begin{aligned} A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I &= \\ \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} &+ \\ + \begin{pmatrix} ad-bc & ad-bc \\ ad-bc & ad-bc \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

21. Calculemos inicialmente as primeiras potências de A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Daí,

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -I \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} p(A) &= A^{2016} + A^{2017} \\ &= (A^3)^{672} + (A^3)^{672} \cdot A \\ &= (-I)^{672} + (-I)^{672} \cdot A \\ &= I + A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

22. Calculemos inicialmente as primeiras potências de A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Daí,

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -I \end{aligned}$$

Suponha que para $k \in \mathbb{N}$

$$A^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Então

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_{k-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto a afirmação vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM