Introdução à Função Quadrática

Noções Básicas: Definição, Máximos e Mínimos

9° **ano E.F.**

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Introdução à Função Quadrática

Noções Básicas: Definição, Máximos e Mínimos

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Podemos encontrar a soma S_n dos n primeiros números inteiros positivos pela relação $S_n = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2}$. Sendo assim, determine:

a) a soma dos 100 primeiros números inteiros.

b) o valor de n para $S_n = 1.953$.

Exercício 2. A função que associa a área A de um retângulo, cujas dimensões são $(x+3)$ e $(x+5)$, e x é:

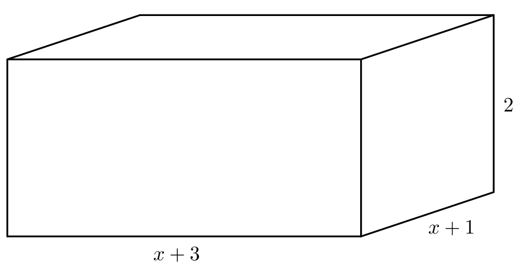
a) $A(x) = x^2 + 15x + 8$.

b) $A(x) = x^2 + 8x + 8$.

c) $A(x) = x^2 + 15x + 15$.

d) $A(x) = x^2 + 8x + 15$.

Exercício 3. Seja V o volume do paralelepípedo da figura. Determine:



a) a fórmula matemática que define seu volume em função do valor de x.

b) o volume para $x = 3$.

c) para que valores de x o volume é 96.

Exercício 4. Dada a função $f(x) = 3x^2 - x + 4$, qual é a imagem de $x = -\dfrac{1}{3}$?

a) $\dfrac{11}{3}$.

b) $\dfrac{13}{3}$.

c) $\dfrac{14}{3}$.

d) $\dfrac{16}{3}$.

e) $\dfrac{17}{3}$.

Exercício 5. O ponto que representa as coordenadas do vértice da parábola do gráfico da função $y = x^2 - 10x + 24$ é:

a) $(1, 2)$.

b) $(5, 1)$.

c) $(5, -1)$.

d) $(10, -2)$.

e) $(-10, 24)$.

Exercício 6. Construa o gráfico da função $y = x^2 - 6x + 8$, destacando seu vértice, raízes e interseção com o eixo y.

Exercício 7. Um dardo é lançado na direção de um alvo e percorre a trajetória de uma parábola. Utilizando um sistema de coordenadas cartesianas, podemos descrever essa trajetória pela função $h = -t^2 + 4t$, sendo h a altura, em metros, do dardo no tempo t, em segundos, após o lançamento. A altura máxima que esse dardo atinge é:

a) 2 m.

b) 4 m.

c) 6 m.

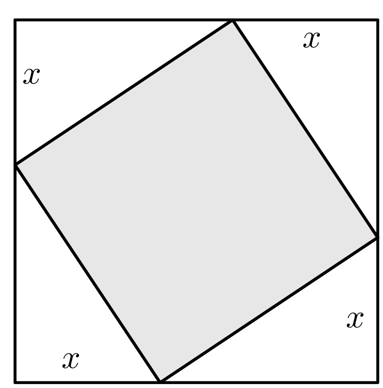
d) 8 m.

e) 10 m.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Tenho material suficiente para erguer 20 m de cerca. Com ele pretendo fazer um cercado retangular de 26 m^2 de área. É possível construirmos este cercado?

Exercício 9. Na figura, temos dois quadrados, sendo que o maior deles tem medida de lado igual a 12 cm. A medida x, em centímetros, para que a área do quadrado interno seja mínima é:



a) 2.

b) 3.

c) 4.

d) 5.

e) 6.

Exercício 10. A temperatura T de um forno (em graus Celsius) é reduzida por um sistema a partir de seu desligamento $(t = 0)$ e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39^o. Qual o tempo mínimo de espera após se desligar o forno para que a porta possa ser aberta?

Exercício 11. Determine o valor de k para que a função $y = -4x^2 + (k+1)x + 2$ admita valor máximo para $x = 2$.

a) 11.

b) 13.

c) 15.

d) 17.

e) 19.

Exercício 12. A empresa SKY transporta 2400 passageiros por mês da cidade de Acrolândia a Bienvenuto. A passagem custa 20 reais e a empresa deseja aumentar seu preço. No entanto, o departamento de pesquisa estima que a cada 1 real de aumento no preço da passagem, 20 passageiros deixarão de viajar pela empresa. Neste caso, qual é o preço da passagem, em reais, que vai maximizar o faturamento da SKY?

Exercício 13. Um jogador de futebol chuta uma bola, inicialmente no chão, que descreve uma trajetória parabólica, caindo 14 metros de distância da posição inicial e atingindo uma altura máxima de 7 metros. Desenhando a situação em um plano cartesiano, vamos considerar a posição inicial da bola na origem deste plano e o eixo x a distância horizontal da bola em relação à origem, sendo que a bola toca o chão novamente no ponto de abscissa 14; vamos considerar também o eixo y como a altura da bola em relação ao chão. A função que representa tal situação é:

a) $y = \frac{x^2}{7} + 2x$.

b) $y = -\frac{x^2}{7} + 2x$.

c) $y = -\frac{x^2}{7} + 14x$.

d) $y = -x^2 - 14x$.

e) $y = x^2 + 7x$.

Exercício 14. Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O valor mensal resultante da venda deste produto é $V(x) = 3x^2 - 12x$ e o custo mensal de produção é dado por $C(x) = 5x^2 - 40x - 40$. Qual é o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Uma lanchonete vende, em média, 200 sanduíches por noite ao preço de $R\$6,00$ cada um. O proprietário observa que, para cada $R\$0,10$ que diminui no preço, a quantidade vendida aumenta em 20 sanduíches. Considerando o custo de $R\$4,50$ para produzir cada sanduíche, qual é o preço de venda que dará o maior lucro ao proprietário?

Exercício 16. A função $L(x) = -x(x-k)$ representa o lucro de uma empresa em função da quantidade de capital empregado x, sendo k um valor real fixo. Se o lucro máximo atingido pela empresa foi o valor positivo y, então é correto afirmar que k é igual a:

a) $3\sqrt{y}$.

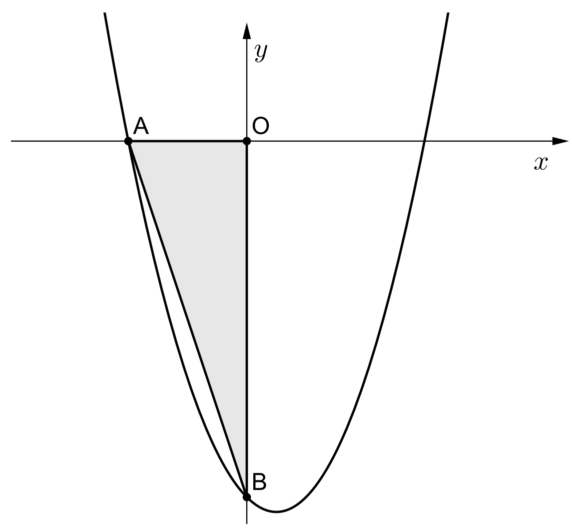
b) $2\sqrt{y}$.

c) $\frac{\sqrt{y}}{3}$.

d) $\sqrt{y-1}$.

e) $\sqrt{y-2}$.

Exercício 17. A parábola da figura é dada por $y = x^2 - x - 6$. A área do triângulo OAB é:



a) 2.

b) 4.

c) 6.

d) 8.

e) 10.

Exercício 18. Mostre que se dois números positivos têm soma constante, então seu produto é máximo quando eles são iguais.

Exercício 19. Numa doceria comprei dois tipos de doce. Do primeiro tipo, 6 unidades de determinado valor unitário. Do segundo tipo, cujo valor unitário é 3 reais mais caro que o primeiro tipo, comprei uma quantidade que equivale ao dobro do valor unitário do primeiro tipo. Entreguei seis notas de 50 reias para pagar tal compra e recebi 30 reais de troco. Dos dois tipos de doce que comprei, gastei com o mais caro, em reais, um total de:

a) 216.

b) 198.

c) 162.

d) 146.

Exercício 20. Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (^oC)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito Alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como:

a) Muito Baixa.

b) Baixa.

c) Média.

d) Alta.

e) Muito Alta.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1.

a)

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \\ S_{100} &= \frac{100^2}{2} + \frac{100}{2} \\ &= 5.000 + 50 \\ &= 5.050. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} &= 1.953 \\ n^2 + n - 3.906 &= 0 \\ n &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 15.624}}{2} \\ n &= \frac{-1 \pm 125}{2} \\ n_1 &= -63 \\ n_2 &= 62. \end{aligned}$$

Portanto, $n = 62$, pois n deve ser positivo.

2. $A(x) = (x+3) \cdot (x+5) = x^2 + 8x + 15$. Resposta D.

3.

a)

$$\begin{aligned} V(x) &= 2 \cdot (x+3) \cdot (x+1) \\ &= 2 \cdot (x^2 + x + 3x + 3) \\ &= 2x^2 + 8x + 6. \end{aligned}$$

b) $V(3) = 2 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 + 6 = 48$.

c)

$$\begin{aligned} 2x^2 + 8x + 6 &= 96 \\ 2x^2 + 8x - 90 &= 0 \\ x^2 + 4x - 45 &= 0 \\ x &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 180}}{2} \\ x &= \frac{-4 \pm 14}{2} \\ x_1 &= -9 \\ x_2 &= 5. \end{aligned}$$

Como $(x+3)$ e $(x+1)$ devem ser valores positivos, $x = 5$.

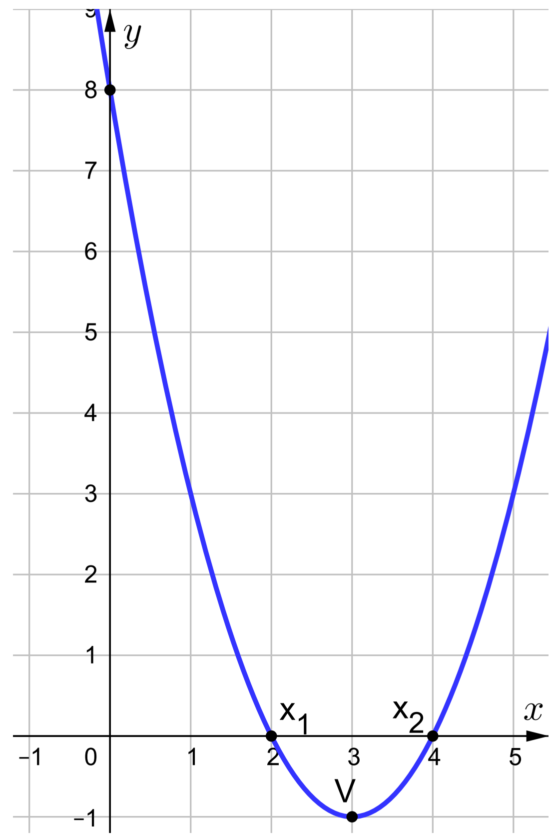
4.

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{3}\right) &= 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) + 4 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 4 \\ &= \frac{1+1+12}{3} \\ &= \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Resposta C.

5. Temos $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-10}{2} = 5$ e $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24}{4 \cdot 1} = -1$. Portanto, as coordenadas do vértice são $(5, -1)$. Resposta C.

6.



7. A altura máxima ocorrem em $h_{max} = y_v$. Temos então:

$$\begin{aligned} h_{max} &= -\frac{\Delta}{4a} \\ &= -\frac{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}{4 \cdot (-1)} \\ &= -\frac{16}{-4} \\ &= 4m. \end{aligned}$$

Resposta B.

8. (Extraído da Vídeo Aula) Se o perímetro deve ter 20 m, então podemos chamar os lados do retângulo de x e $(10 - x)$. Assim, a área A do retângulo pode ser escrita como $A(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x$, cuja área máxima é $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{100}{-4} = 25\ m^2$. Portanto, não é possível que a área tenha 26 m^2.

9. Se o lado do quadrado maior mede 12 cm, então os quatro triângulos retângulos têm catetos medindo x e $(12 - x)$. Sendo assim, a área do quadrado menor é

$$A(x) = 12^2 - 4 \cdot \frac{x(12-x)}{2} = 2x^2 - 24x + 144.$$

Trata-se de uma função do segundo grau, cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima, ou seja, a área mínima ocorre no vértice desta parábola. Temos então $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-24}{4} = 6\ cm$. Resposta E.

10. (Extraído da Vídeo Aula) Temos

$$\begin{aligned} -\frac{t^2}{4} + 400 &= 39 \\ -\frac{t^2}{4} &= -361 \\ \frac{t^2}{4} &= 361 \\ t^2 &= 4 \cdot 361 \\ t &= \pm\sqrt{4 \cdot 361} \\ t &= \pm 2 \cdot 19 \\ t &= \pm 38. \end{aligned}$$

Portanto, o tempo mínimo para a abertura da porta é 38^oC.

11. Se o valor máximo ocorre em $x = 2$, temos:

$$\begin{aligned} x_v &= -\frac{b}{2a} \\ 2 &= -\frac{k+1}{2 \cdot (-4)} \\ 2 \cdot (-8) &= -(k+1) \\ k+1 &= 16 \\ k &= 15. \end{aligned}$$

Resposta C.

12. (Extraído da Vídeo Aula) Vamos aumentar a passagem em x reais. Assim, a quantidade de passageiros que desistirá de viajar pela empresa será $20x$ e, consequentemente, o faturamento F pode ser expresso por:

$$\begin{aligned} F(x) &= (2.400 - 20x)(20 + x) \\ &= 20(120 - x)(20 + x) \\ &= 20(-x^2 + 100x + 2.400). \end{aligned}$$

O valor de x que maximiza o faturamento é $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2 \cdot (-1)} = 50$, ou seja, a passagem deve ser vendida por $R\$70,00$.

13. Se a bola toca o chão em $x = 0$ e $x = 14$, então podemos escrever a função como $y = a(x-0)(x-14)$. Se a altura máxima é 7 e a média das raízes é $\frac{0+14}{2} = 7$, então o ponto $(7, 7)$ pertence ao gráfico da função, ou seja, $7 = a \cdot 7 \cdot (-7)$, segue que $a = -\frac{1}{7}$. Portanto, $y = -\frac{x^2}{7} + 2x$. Resposta B.

14. (Extraído da Vídeo Aula) Seja L o lucro mensal, temos:

$$\begin{aligned} L(x) &= V(x) - C(x) \\ &= (3x^2 - 12x) - (5x^2 - 40x - 40) \\ &= -2x^2 + 28x + 40. \end{aligned}$$

Sendo assim, o valor de x para lucro máximo é $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{28}{-4} = 7$.

15. (Extraído da Vídeo Aula) Vamos reduzir o preço de cada sanduíche em $0,10x$. Assim, a quantidade de sanduíches vendidos aumenta $20x$. Calculando o lucro L com a venda destes sanduíches, temos:

$$\begin{aligned} L(x) &= (6 - 0,1x)(200 + 20x) - 4,5(200 + 20x) \\ &= (6 - 0,1x - 4,5)(200 + 20x) \\ &= (1,5 - 0,1x)(200 + 20x) \\ &= 300 + 30x - 20x - 2x^2 \\ &= -2x^2 + 10x + 300. \end{aligned}$$

O lucro máximo ocorre com $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{-4} = 2,5$. Portanto, o preço de venda de cada sanduíche deverá ser $6 - 0,1 \cdot 2,5 = 5,75$ reais.

16. (Extraído do CEFET-MG) O lucro $L(x) = -x^2 + kx$ é máximo no vértice da parábola do gráfico da função, ou seja, $-\frac{k^2}{4 \cdot (-1)} = y$, segue que $k = 2\sqrt{y}$. Resposta B.

17. A interseção do gráfico com o eixo y ocorre em $(0, -6)$, ou seja, $OB = 6$. As raízes da função são $x = \frac{1 \pm 5}{2}$, ou seja, $OA = 2$. Portanto, a área do triângulo OAB é $\frac{2 \cdot 6}{2} = 6$. Resposta C.

18. (Extraído da Vídeo Aula) Sejam x e n dois números positivos e S sua soma. Podemos escrever seu produto como $P = x \cdot n = x(S - x) = -x^2 + Sx$, sendo seu valor máximo em $x_v = -\frac{S}{2 \cdot (-1)} = \frac{S}{2}$. Assim, o maior produto é $\frac{x+n}{2}$, que é a média aritmética entre eles, sendo seu valor máximo quando são iguais.

19. (Extraído da EPCAR - 2017) Do primeiro tipo foram 6 unidades a x reais, enquanto que do segundo tipo foram $2x$ unidades a $(3 + x)$ reais. Como o gasto com os doces foi 270 reais, temos:

$$\begin{aligned} 6x + 2x \cdot (3 + x) &= 270 \\ 2x^2 + 12x - 270 &= 0 \\ x^2 + 6x - 135 &= 0 \\ x &= \frac{-6 \pm 24}{2} \\ x_1 &= -15 \\ x_2 &= 9. \end{aligned}$$

Sendo assim, gastou-se com o primeiro tipo $6 \cdot 9 = 54$ reais e com o segundo $270 - 54 = 216$ reais. Resposta A.

20. (Extraído do ENEM - 2015) A maior temperatura ocorre no vértice da parábola do gráfico da função, ou seja, $T_{max} = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{144}{-4} = 36^oC$. Pela tabela, vemos que esse valor corresponde a uma temperatura alta. Resposta D.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com