Trigonometria III

Funções Trigonométricas

Material elaborado por Letícia Mattos.

Trigonometria III
Funções Trigonométricas

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Seja x um número real. Prove cada uma das identidades abaixo.

(a) $sen(-x) = sen(\pi + x) = -sen(x)$

(b) $sen(\pi - x) = sen(x)$

(c) $\cos(-x) = \cos(x)$

(d) $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x) = -\cos(x)$

Exercício 2. Seja x um número real. Prove cada uma das identidades abaixo.

(a) $sen(\pi/2 + x) = \cos(x)$

(b) $sen(3\pi/2 - x) = -\cos(x)$

(c) $\cos(\pi/2 + x) = -sen(x)$

(d) $\cos(3\pi/2 - x) = -sen(x)$

Exercício 3. Determine todos os valores distintos de $\cos k\pi/3$ para $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 4. Para quais valores $x \in \mathbb{R}$ temos $sen(x) > 1/2$?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz a seguinte relação:

$$f(x+3) + f(x) = 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que f é uma função periódica.

Exercício 6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$f(x) = sen(x) + \cos(\alpha x).$$

Prove que se f é periódica então α é racional.

Exercício 7. Seja $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$f(x) = sen(\sqrt{x}).$$

Prove que f é uma função não periódica.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função dada por

$$f(x) = \cos(x) + \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right).$$

Prove que f não é uma função periódica.

Exercício 9. Seja $n \in \mathbb{N}$ e sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais fixos. Considere uma função f definida por

$$f(x) = \frac{\cos(a_1 + x)}{2^0} + \frac{\cos(a_2 + x)}{2^1} + \cdots + \frac{\cos(a_n + x)}{2^{n-1}}.$$

Sejam x_1, x_2 números reais tais que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Mostre que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $x_1 - x_2 = m\pi$.

Respostas e Soluções.

1. Para qualquer ângulo α, denote por P_α o ponto da circuferênncia trigonométrica cujo argumento é igual a α. Observe que, se $P_x = (a, b)$, então temos

$$\begin{aligned} P(-x) &= (a, -b), \\ P(x+\pi) &= (-a, -b), \\ P(-x+\pi) &= (-a, b). \end{aligned}$$

Mas, também temos que $P_\alpha = (\cos(\alpha), sen(\alpha))$ para qualquer ângulo α. Das igualdades acima, segue que

$$\begin{aligned} (\cos(-x), sen(-x)) &= (\cos(x), -sen(x)), \\ (\cos(x+\pi), sen(x+\pi)) &= (-\cos(x), -sen(x)), \\ (\cos(-x+\pi), sen(-x+\pi)) &= (-\cos(x), sen(x)). \end{aligned}$$

Isso prova todas as relações enunciadas nos itens de (a) a (d).

2. Como no exercício anterior, para qualquer ângulo α, denote por P_α o ponto da circuferênncia trigonométrica cujo argumento é igual a α. Denote por O o centro da circunferência trigonométrica. Observe que os segmentos OP_x e $OP_{x+\pi/2}$ são perpendiculares. Pela relação entre os coeficientes angulares de retas perpendiculares, temos que se $P_\alpha = (a, b)$, então $P_{\alpha+\pi/2} = (-b, a)$ e $P_{\alpha-\pi/2} = (b, -a)$ (faça um desenho!). Dessas relações, segue que

$$(sen(x+\pi/2), \cos(x+\pi/2)) = (\cos(x), -sen(x)). \quad (1)$$

Isso prova os itens (a) e (c). Para os itens (b) e (d), observe que $3\pi/2 + \alpha = \pi + \pi/2 + \alpha$, para qualquer ângulo α. Assim, pela igualdade (**??**), temos

$$(sen(3\pi/2 - x), \cos(3\pi/2 - x)) = (\cos(\pi - x), -sen(\pi - x))$$

Pelo exercício 1, temos que $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ e $sen(\pi - x) = sen(x)$. Assim, obtemos

$$(sen(3\pi/2 - x), \cos(3\pi/2 - x)) = (-\cos(x), -sen(x)).$$

Observe que, se $P_x = (a, b)$, então temos

$$\begin{aligned} P(-x) &= (a, -b), \\ P(x+\pi) &= (-a, -b), \\ P(-x+\pi) &= (-a, b). \end{aligned}$$

Mas, também temos que $P_\alpha = (\cos(\alpha), sen(\alpha))$ para qualquer ângulo α. Das igualdades acima, segue que

$$\begin{aligned} (\cos(-x), sen(-x)) &= (\cos(x), -sen(x)), \\ (\cos(x+\pi), sen(x+\pi)) &= (-\cos(x), -sen(x)), \\ (\cos(-x+\pi), sen(-x+\pi)) &= (-\cos(x), sen(x)). \end{aligned}$$

Isso prova todas as relações enunciadas nos itens de (a) a (d).

3. Veja que

$$\begin{aligned} \cos(0\pi/3) &= 1 \\ \cos(\pi/3) &= 1/2 \\ \cos(2\pi/3) &= -1/2 \\ \cos(3\pi/3) &= -1 \end{aligned}$$

Para $k = 4$, temos que

$$\begin{aligned} \cos(4\pi/3) &= \cos(\pi + \pi/3) \\ &= -cos(\pi/3) \\ &= -1/2. \end{aligned}$$

A penúltima iguadade acima segue do Exercício 1. Para $k = 5$, temos que

$$\begin{aligned} \cos(5\pi/3) &= \cos(-\pi/3) \\ &= cos(\pi/3) \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

A penúltima igualdade acima também segue do Exercício 1. A partir do $k \geq 6$ e $k < 0$, esses valores começam a se repetir, já que a função cosseno é periódica e tem período 2π. Concluímos que

$$\left\{\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) : k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1\right\}.$$

4. Primeiro, lembre-se que $sen(\pi/6) = 1/2$. A função seno é crescente no primeiro quadrante. Portanto, $sen(x) > 1/2$ para $x \in [0, \pi/2]$ se, e somente se, $x \in (\pi/6, \pi/2]$. No segundo quadrante, a função seno é decrescente. Logo, $sen(x) > 1/2$ para $x \in [\pi/2, \pi]$ se, e somente se, $x \in [\pi/2, \pi - \pi/6)$ (lembre-se que $sen(\pi - \pi/6) = sen(\pi/6)$). Como a função seno é negativa no terceiro e quarto quadrantes, obtemos

$$\left\{x \in [0, 2\pi] : sen(x) > \frac{1}{2}\right\} = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right).$$

Pela periodicidade da função seno, concluímos que os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $sen(x) > 1/2$ são da forma

$$2\pi k + \alpha,$$

onde $k \in \mathbb{Z}$ e $\alpha \in (\pi/6, 5\pi/6)$.

5. Da relação $f(x+3) + f(x) = 1$, obtemos $f(x+3) + f(x) = f(x+6) + f(x+3)$. Isso nos dá

$$f(x+6) = f(x).$$

Concluímos que f é uma função periódica de período 6.

6. Seja T o período de f. Então, temos que

$$sen(x+T) + \cos\big(\alpha(x+T)\big) = sen(x) + \cos(\alpha x).$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, quando $x = 0$, temos

$$sen(T) + \cos(\alpha T) = 1. \quad (2)$$

E, quando $x = -T$, temos

$$sen(-T) + \cos\big(\alpha(-T)\big) = 1,$$

o que é equivalente a

$$-sen(T) + \cos\big(\alpha T\big) = 1 \quad (3)$$

Subtraindo (**??**) de (**??**), ficamos com

$$2\, sen(T) = 0.$$

Portanto, T deve ser da forma $k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Substituindo essa expressão em (**??**), obtemos

$$\cos(k\pi\alpha) = 1.$$

Concluímos que α deve ser racional.

7. Suponha por contradição que f é periódica. Então, existe $T > 0$ tal que

$$sen\left(\sqrt{x+T}\right) = sen(\sqrt{x}),$$

para todo $x \geq 0$. Isso implica que

$$\sqrt{x+T} = n\pi + \sqrt{x}$$
$$\text{ou}$$
$$\sqrt{x+T} = n\pi - \sqrt{x},$$

para algum $n \in \mathbb{Z}$. Vamos apenas lidar com o primeiro caso, já que no segundo a análise é totalmente análoga. Elevando ao quadrado ambos os lados da primeira equação acima, obtemos

$$x + T = (n\pi)^2 + x + 2n\pi\sqrt{x}.$$

Assim, devemos ter

$$T = (n\pi)^2 + 2n\pi\sqrt{x},$$

o que é uma contradição, pois assumimos que T é constante e não depende de x.

8. Suponha por contradição que f é uma função periódica e denote por T o seu período. Como $f(x+T) = f(x)$ para todo x, em particular temos $f(T) = f(0) = 2$. Isso nos dá

$$\cos(T) + \cos\left(\frac{T\sqrt{3}}{2}\right) = 2.$$

Como cosseno é uma função limitada por 1, da igualdade acima segue que

$$\cos(T) = 1 \qquad \text{e} \qquad \cos\left(\frac{T\sqrt{3}}{2}\right) = 1.$$

Assim, devem existir $k, \ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tais que

$$T = 2\pi k \qquad \text{e} \qquad \frac{T\sqrt{3}}{2} = 2\pi\ell.$$

Isso nos dá

$$\sqrt{3} = \frac{2\ell}{k},$$

o que é uma contradição! Pois $\sqrt{3}$ não é racional!

9. Esse foi o problema 2 da IMO de 1969.
Relembre a fórmula do cosseno da soma de dois ângulos:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - sen(\alpha)\,sen(\beta).$$

Usando essa fórmula, note que podemos escrever $f(x) = A\cos(x) + B\,sen(x)$, onde

$$A = \cos(a_1) + \frac{\cos a_2}{2} + \cdots + \frac{\cos a_n}{2^{n-1}}$$
$$\text{e}$$
$$B = -\cos(a_1) - \frac{\cos a_2}{2} - \cdots - \frac{\cos a_n}{2^{n-1}}.$$

Agora, afirmamos que A e B não são ambos iguais a 0, ou seja, a função f não é nula em todo ponto. De fato, como $\cos(\alpha) \geq -1$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} f(-a_1) &\geq 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{2^{n-1}} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Como A e B não são ambos iguais a 0, temos $A^2 + B^2 > 0$. Logo, existe um ângulo γ tal que

$$\cos(\gamma) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \text{e} \qquad sen(\gamma) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} f(x) &= A\cos(x) + B\,sen(x) \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\cdot\left(\cos(\gamma)\cos(x) + sen(\gamma)\,sen(x)\right) \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\cdot\cos(x-\gamma). \end{aligned}$$

Se $f(x_1) = f(x_2) = 0$, então temos

$$\cos(x_1-\gamma) = \cos(x_2-\gamma) = 0.$$

Isso significa que devem existir $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tais que

$$x_1 - \gamma = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{e} \qquad x_2 - \gamma = \frac{\pi}{2} + \ell\pi.$$

Subtraindo uma equação da outra, concluímos que $x_1 - x_2 = (k-\ell)\pi$, como queríamos.

Material elaborado por Letícia Mattos.