Módulo Tópicos Adicionais

Recorrências

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Módulo Tópico Adicionais
Recorrências

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Considere a sequência definida por $x_1 = d$ e $x_n = r + x_{n-1}$, para $n > 1$. Trata-se de uma progressão aritmética de razão r e termo inicial d. Podemos listar as relações entre vários termos consecutivos:

$$\begin{aligned}
x_n &= r + \cancel{x_{n-1}} \\
\cancel{x_{n-1}} &= r + \cancel{x_{n-2}} \\
\cancel{x_{n-2}} &= r + \cancel{x_{n-3}} \\
&\dots \\
\cancel{x_3} &= r + \cancel{x_2} \\
\cancel{x_2} &= r + x_1
\end{aligned}$$

Somando as equações anteriores, obtemos o cancelamento dos termos que aparencem em ambos os membros e assim

$$\begin{aligned}
x_n &= (r + r + \ldots + r) + x_1 \\
&= (n-1)r + d.
\end{aligned}$$

Usando uma Soma Telescópica semelhante, encontre uma expressão, em função de n, para cada uma das sequências abaixo, em que $x_1 = 1$ e, para $n > 1$, vale que

(a) $x_n = n^2 + x_{n-1}$;

(b) $x_n = 2^{n-1} + x_{n-1}$;

(c) $x_n = (n-1) + x_{n-1}$.

Exercício 2. Se $a_1 = 1$ e, para $n \geq 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 1$, determine o valor de a_n em função de n.

Exercício 3. Se $a_1 = 1$ e, para $n \geq 1$, $a_{n+1} = 5a_n + 3$, determine o valor de a_n em função de n.

Exercício 4. Se $a_0 = a_1 = 1$ e, para $n > 1$, $a_{n+1} = 2pa_n - p^2 a_{n-1}$, determine o valor de a_n em função de n.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Encontre a equação característica das seguintes recorrências

a) $a_{n+2} = 3a_n + a_{n-1}$.

b) $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2}$.

c) $2a_{n+2} = 3a_n + 4a_{n-1}$.

Exercício 6. Determine uma fórmula geral para a sequência a_n definida por $a_0 = a_1 = 1$ e $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$.

Exercício 7. Determine uma fórmula geral para a sequência a_n definida por $a_0 = 2$, $a_1 = 4$ e, para $n \geq 2$, $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$.

Exercício 8. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja a_n o número de sequências de comprimento n com elementos do conjunto $\{0, 1, 2\}$ sem que existam dois algarismos não nulos consecutivos. Por exemplo, para $n = 2$ as sequências que podem ser contruídas são $01, 02, 10, 20, 00$ e assim $a_2 = 5$.

(a) Verifique que $a_3 = 5 + 2 \cdot 3$.

(b) Mostre que $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$.

(c) Encontre uma expressão, em função de n, para a_n.

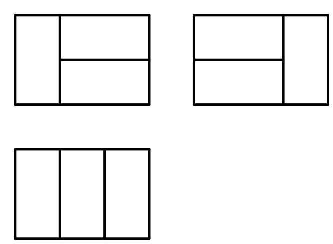
3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 9. A sequência (a_n) satisfaz $a_0 = 1/4$, $a_1 = 1$ e, para $n \geq 2$,

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^2 = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}.$$

Encontre uma expressão em função de n para a_n.

Exercício 10. A figura abaixo representa os 3 preenchimentos, sem sobreposição, de um tabuleiro 2×3 por peças 2×1. Se x_n denota o número de preenchimentos distintos de um tabuleiro $2 \times n$, determine o valor de x_n em função de n.



Exercício 11. A sequência de Fibonacci começa com $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e, a partir do segundo termo, cada novo termo é obtido somando-se os dois anteriores, ou seja,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \ \text{ para } \ n \geq 0.$$

Assim, os primeiros termos da sequência de Fibonacci são:

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

a) Verifique que $F_{n+3} < 5F_n$ para todo $n \geq 3$.

b) Seja n um inteiro positivo. Mostre que entre potências consecutivas de n existe no máximo n números de Fibonacci.

Exercício 12. (A Pizza de Jacob Steiner) Em 1826 o Matemático suiço Jacob Steiner descobriu o número máximo em que n retas podem dividir o plano, que será denotado por L_n.

a) Encontre os valores de L_1, L_2 e L_3.

b) Mostre que $L_n = L_{n-1} + n$, para $n > 0$.

c) Considere as somas sucessivas:

$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + n \\ L_{n-1} &= L_{n-2} + (n-1) \\ L_{n-2} &= L_{n-3} + (n-2) \\ &\dots \\ L_2 &= L_1 + 2 \end{aligned}$$

A partir delas, mostre que $L_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$.

Exercício 13. Uma sequência de números reais x_n é uma lista ordenada de reais em que o primeiro número da lista é o termo x_1, o segundo é o termo x_2 e assim por diante. Por exemplo, a sequência usual dos números inteiros positivos pode ser descrita como $x_n = n$ para todo inteiro positivo n. Algumas sequências podem ser definidas por equações de recorrências, em que um termo é definido em função dos seus anteriores.

Por exemplo, a sequência de inteiros positivos poderia ser definida por $x_1 = 1$ e $x_n = x_{n-1} + 1$ para todo inteiro positivo $n \geq 2$. Desse modo, poderíamos calcular $x_2 = 1 + 1 = 2$, $x_3 = 2 + 1 = 3$ e assim por diante.

Considere uma sequência de números reais definida por $x_1 = 1$ e $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}^2}$ para todo inteiro positivo $n \geq 2$.

a) Calcule x_2, x_3 e x_4.

b) Verifique que a sequência é estritamente crescente, ou seja, que $x_n > x_{n-1}$ para todo inteiro positivo n.

c) Perceba que a sequência parece crescer muito pouco. Após calcular alguns termos iniciais, poderíamos suspeitar que nenhum termo excede 2016, mas de fato vamos provar que existem termos maiores que 2016. Para isso, vamos usar a sequência auxiliar $y_n = x_n^3$. Prove que $y_n > y_{n-1} + 3$ para todo $n \geq 2$.

d) Prove que existe um número N tal que $x_N > 2016$.

Exercício 14. Considere o seguinte tabuleiro quadriculado onde todos os números naturais foram escritos em diagonal.

$\ddots$					
10	$\ddots$				
6	9	$\ddots$			
3	5	8	12	$\ddots$	
1	2	4	7	11	$\ddots$

Cada quadradinho possui uma posição denotada por (x, y), em que x representa a coluna, contada da esquerda para a direita, e y representa a linha, contada debaixo para cima. Por exemplo, 12 é o número escrito no quadradinho de posição $(4, 2)$:

a) Determine o número que está no quadradinho de posição $(4, 4)$.

b) Determine o número que está no quadradinho de posição $(1, 2016)$.

c) Determine o número que está no quadradinho de posição $(2013, 2017)$.

Exercício 15. A sequência de Fibonacci é definida pela seguinte recursão:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

com $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$. Mostre que para todo inteiro positivo n, existe um número de Fibonacci múltiplo de n.

Exercício 16. Uma seqüência $(a_n)_{n \geq 1}$ de números reais satisfaz, para cada $n \geq 1$, a igualdade

$$\frac{a_{n+3} - a_{n+2}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{a_{n+3} + a_{n+2}}{a_n + a_{n+1}}.$$

Sabendo que $a_1 = 4$, $a_2 = 2$ e $a_3 = 1$, mostre que, para todo natural k, a soma

$$a_1{}^k + a_2{}^k + \cdots + a_{100}{}^k$$

é um quadrado perfeito.

Respostas e Soluções.

1.

(a) Temos

$$\begin{aligned} x_n &= n^2 + x_{n-1} \\ x_{n-1} &= (n-1)^2 + x_{n-2} \\ x_{n-2} &= (n-2)^2 + x_{n-3} \\ &\dots \\ x_2 &= 2^2 + x_1 \end{aligned}$$

Somando as equações e cancelando os termos que aparecem em ambos os membros, obtemos

$$\begin{aligned} x_n &= (2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + x_1 \\ &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

(b) Temos

$$\begin{aligned} x_n &= 2^{n-1} + x_{n-1} \\ x_{n-1} &= 2^{n-2} + x_{n-2} \\ x_{n-2} &= 2^{n-3} + x_{n-3} \\ &\dots \\ x_2 &= 2^1 + x_1 \end{aligned}$$

Somando as equações e cancelando os termos que aparecem em ambos os membros, obtemos

$$\begin{aligned} x_n &= (2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) + x_1 \\ &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) - 1 + 1 \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

(c) Temos

$$\begin{aligned} x_n &= (n-1) + x_{n-1} \\ x_{n-1} &= (n-2) + x_{n-2} \\ x_{n-2} &= (n-3) + x_{n-3} \\ &\dots \\ x_2 &= 1 + x_1 \end{aligned}$$

Somando as equações e cancelando os termos que aparecem em ambos os membros, obtemos

$$\begin{aligned} x_n &= (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)) + x_1 \\ &= \frac{(n-1)n}{2} + 1. \end{aligned}$$

2. Se $b_n = a_n/3^n$, temos

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n + 1 \\ \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} &= \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} \\ b_{n+1} &= b_n + \frac{1}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} b_n &= b_{n-1} + \frac{1}{3^n} \\ b_{n-1} &= b_{n-2} + \frac{1}{3^{n-1}} \\ b_{n-2} &= b_{n-3} + \frac{1}{3^{n-2}} \\ &\dots \\ b_2 &= b_1 + \frac{1}{3^2}. \end{aligned}$$

Somando as equações e cancelando os termos que aparecem em ambos os membros, temos

$$\begin{aligned} b_n &= (\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{3^n}) + b_1 \\ &= \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^n}. \end{aligned}$$

Portanto, $a_n = \dfrac{3^n - 1}{2 \cdot 3^n}$.

3. Somando c a cada um dos membros da fórmula de recorrência, temos

$$\begin{aligned} a_{n+1} + c &= 5a_n + 3 + c \\ &= 5\left(a_n + \frac{3+c}{5}\right) \end{aligned}$$

Note que $\dfrac{3+c}{5} = c$ se, e somente, $c = 3/4$. Escolhendo esse valor para c e definindo $b_n = a_n + c$, obtemos $b_{n+1} = 5b_n$ com $b_1 = 1 + 3/4 = 7/4$. A sequência b_n é uma progressão geométrica de razão 5 e seu termo geral é $b_n = 5^{n-1} \cdot 7/4$. Portanto

$$\begin{aligned} a_n &= b_n - c \\ &= 5^{n-1} \cdot \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \\ &= \frac{7 \cdot 5^{n-1} - 3}{4}. \end{aligned}$$

4. A equação característica da recorrência dada é $x^2 - 2px + p^2 = 0$. Ela possui duas raízes iguais a p. Se $b_n = a_n - pa_{n-1}$, temos

$$\begin{aligned} a_{n+1} - pa_n &= pa_n - p^2 a_{n-1} \\ b_{n+1} &= pb_n \end{aligned}$$

A sequência b_n é uma progressão geométrica de razão p e termo inicial $b_1 = a_1 - pa_0 = (1-p)$. Daí,

$$\begin{aligned} b_n &= (1-p)p^{n-1} \\ a_n - pa_{n-1} &= (1-p)p^{n-1} \\ a_n &= pa_{n-1} + (1-p)p^{n-1}. \end{aligned}$$

A partir da última equação, para encontrar a fórmula geral de a_n, podemos definir $c_n = \dfrac{a_n}{p^n}$ e assim

$$\begin{aligned} a_n &= pa_{n-1} + (1-p)p^{n-1} \\ \frac{a_n}{p^n} &= \frac{pa_{n-1} + (1-p)p^{n-1}}{p^n} \\ c_n &= c_{n-1} + \frac{1-p}{p}. \end{aligned}$$

A sequência c_n é uma progressão aritmética de razão $\dfrac{1-p}{p}$. O seu termo geral é da forma $c_n = \dfrac{(n-1)(1-p)}{p} + c_1$. Finalmente,

$$\begin{aligned} a_n &= p^n \cdot c_n \\ &= p^n \cdot \left(\frac{(n-1)(1-p)}{p} + c_1 \right) \\ &= p^{n-1}(1-p)(n-1) + p^n \cdot \frac{a_1}{p} \\ &= p^{n-1}(1-p)(n-1) + p^{n-1} \\ &= p^{n-1}((1-p)(n-1)+1). \end{aligned}$$

5. As equações características são

a) $x^2 - 3x - 1 = 0$.

b) $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$.

c) $2x^3 - 3x - 4 = 0$.

6. A equação característica associada a recorrência é $x^2 - 3x + 2 = 0$ e suas raízes são $(r_1, r_2) = (1, 2)$. A fórmula geral da recorrência é dada por

$$\begin{aligned} a_n &= cr_1^n + dr_2^n \\ &= c1^n + d2^n. \end{aligned}$$

Para encontrarmos os valores das constantes c e d, basta resolvermos o sistema gerado ao substituirmos $n = 0$ e $n = 1$:

$$\begin{aligned} 2 &= c + d \\ 3 &= c + 2d \end{aligned}$$

A solução do sistema é $(c, d) = (1, 1)$. Assim, para $n \geq 0$,

$$a_n = 1^n + 2^n.$$

7. A equação característica associada a recorrência é $x^2 - 4x + 1 = 0$ e suas raízes são $(r_1, r_2) = (2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$. A fórmula geral da recorrência é dada por

$$a_n = c(2+\sqrt{3})^n + d(2-\sqrt{3})^n$$

Para encontrarmos os valores das constantes c e d, basta resolvermos o sistema gerado ao substituirmos $n = 0$ e $n = 1$:

$$\begin{aligned} 2 &= c + d \\ 4 &= c(2+\sqrt{3}) + d(2-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

A solução do sistema é $(c, d) = (1, 1)$. Assim, para $n \geq 0$,

$$a_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$$

8.

(a) Temos dois tipos de sequências com três termos: as que terminam com 0 e as que terminam em um dígito não nulo. As que terminam com 0 são obtidas de uma sequência com dois termos com o acréscimo de um 0 no final. As que não terminam em 0, devem terminar em 01 ou 02 e são obtidas das sequências com um algarismo. Como existem 5 sequências com 2 algarismos e 3 com 1 algarismo, o total de sequências com 3 algarismos é $a_3 = 5 + 2 \cdot 3 = 11$.

(b) Repetindo o argumento do item anterior, uma sequência de comprimento n ou termina em zero ou termina em um dígito não nulo. As que terminam em zero são obtidas das sequências de comprimento $n-1$ através do acréscimo desse algarismo. As que não terminam em 0 devem terminar em 01 ou 02. A quantidade delas é o dobro das sequências de comprimento $n-2$, pois qualquer uma delas pode ser completada de 2 formas para obtenção de uma sequência de comprimento n. Assim, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$.

(c) A equação característica da recorrência é $x^2 - x - 2 = 0$. As raízes são 2 e -1. Portanto, a solução geral é da forma $a_n = c2^n + d(-1)^n$. Para encontrar os valores de c e d, basta resolvermos o sistema quando trocarmos $n = 1$ e $n = 2$:

$$\begin{aligned} 3 &= 2c - d \\ 5 &= 4c + d. \end{aligned}$$

A solução é $(c, d) = (4/3, -1/3)$. Daí

$$a_n = \frac{2^{n+2} + (-1)^{n+1}}{3}.$$

9. Seja $b_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$. Daí $b_n = b_{n-1}^{1/2}$. Consequentemente

$$\begin{aligned} b_n &= b_{n-1}^{1/2} \\ &= b_{n-2}^{1/2^2} \\ &= b_{n-3}^{1/2^3} \\ &\dots \\ &= b_1^{1/2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1}{a_0} \\ &= 4. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} b_n &= 4^{1/2^{n-1}} \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} &= 4^{1/2^{n-1}} \\ a_n &= 4^{1/2^{n-1}} a_{n-1}. \end{aligned}$$

Podemos encontrar o valor de a_n realizando um Produto Telescópico

$$\begin{aligned} a_n &= 4^{1/2^{n-1}} a_{n-1} \\ a_{n-1} &= 4^{1/2^{n-2}} a_{n-2} \\ a_{n-2} &= 4^{1/2^{n-3}} a_{n-3} \\ &\dots \\ a_1 &= 4^{1/2^1} a_0 \end{aligned}$$

Multiplicanto as equações anteriores e cancelando os termos que estão em ambos os membros, obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= 4^{1/2^{n-1}+1/2^{n-1}+\ldots+1} a_0 \\ &= 4^{-1/2^{n-1}}. \end{aligned}$$

10. (Extraído da vídeo aula) Um preenchimento de um tabuleiro $2 \times n$ pode terminar com uma peça na vertical ou na horizontal. Se terminar na vertical, o preenchimento pode se obtido de cada uma das x_{n-1} maneiras de preenchermos o tabuleiro $2 \times (n-1)$. Se terminar na horizontal, o preenchimento pode ser obtido de cada uma das x_{n-2} maneiras de preenchermos o tabuleiro $2 \times (n-2)$. Portanto, $x_n = x_{n-1} + x_n$. A equação característica da recorrência é $x^2 - x - 1 = 0$ e as raízes são $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ e a solução geral é $x_n = c\alpha^n + d\beta^n$. Como $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$, segue que

$$\begin{aligned} 1 &= c\alpha + d\beta \\ 2 &= c\alpha^2 + d\beta^2 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema anterior obtemos $(c, d) = (\alpha/\sqrt{5}, -\beta/\sqrt{5})$. Daí $x_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}$.

11.

a) Como a sequência de Fibonacci é crescente, temos

$$\begin{aligned} F_{n+3} &= F_{n+2} + F_{n+1} \\ &= 2 \cdot F_{n+1} + F_n \\ &= 3 \cdot F_n + 2 \cdot F_{n-1} \\ &< 3 \cdot F_n + 2 \cdot F_n \\ &= 5 \cdot F_n. \end{aligned}$$

b) Suponha que existam mais que n números de Fibonacci entre n^k e n^{k+1}. Denotemos as $n+1$ primeiras delas por $F_l, F_{l+1}, \ldots, F_{l+n}$. Assim, como F_l e F_{l+1} são maiores que n^k, temos

$$\begin{aligned} F_{l+2} &= F_{l+1} + F_l \\ &> n^k + n^k \\ &= 2 \cdot n^k \\ F_{l+3} &= F_{l+2} + F_{l+1} \\ &> 2 \cdot n^k + n^k \\ &= 3 \cdot n^k \\ F_{l+4} &= F_{l+3} + F_{l+2} \\ &> 3 \cdot n^k + n^k \\ &= 4 \cdot n^k \\ &\vdots \\ F_{l+n} &= F_{l+n-1} + F_{l+n-2} \\ &> (n-1) \cdot n^k + n^k \\ &= n^{k+1}. \end{aligned}$$

Isso é um absurdo, pois $F_{l+n} < n^{k+1}$.

12. (Extraído da vídeo aula)

(a) Com uma reta, o plano fica dividido em dois semiplanos e daí $L_1 = 2$. Com duas retas, o número máximo de regiões é atingido quando elas não são paralelas e assim o número de regiões formadas é 4. Portanto, $L_2 = 4$. Considere agora uma configuração com duas retas que se intersectam. Uma terceira reta irá intersectar as duas já traçadas em no máximo dois pontos, quando ela não for paralela a nenhuma dela. Esses dois pontos dividem a terceira reta em três intervalos: duas semiretas e um segmento. O segmento e essas semiretas dividem algumas das regiões já definidas pelas duas semiretas gerando 3 novas regiões. Daí $L_3 = L_2 + 3 = 4 + 3 = 7$.

(b) Considere n retas no plano sem que existam duas delas paralelas. Um conjunto S de $n-1$ delas determina L_{n-1} regiões no plano. A reta não considerada em S é dividida em n intervalos pelos $n-1$ pontos de interseção dela com as outras $n-1$ retas. Cada um desses intervalos divide uma das L_{n-1} regiões em duas. Assim, $L_n = L_{n-1} + n$.

(c) Considere a soma das equações obtidas com a identidade do item anterior:

$$\begin{aligned} L_n &= \cancel{L_{n-1}} + n \\ \cancel{L_{n-1}} &= \cancel{L_{n-2}} + (n-1) \\ \cancel{L_{n-2}} &= \cancel{L_{n-3}} + (n-2) \\ &\dots \\ \cancel{L_2} &= L_1 + 2 \end{aligned}$$

O cancelamento dos termos que aparecem em ambos os termos produz

$$\begin{aligned} L_n &= (2 + 3 + \ldots + (n-1) + n) + L_1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1. \end{aligned}$$

13.

a) Basta usar a equação dada para $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$.

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{x_1^2} = 1 + \frac{1}{1^2} = 2.$$

$$x_3 = x_2 + \frac{1}{x_2^2} = 2 + \frac{1}{2^2} = \frac{9}{4}.$$

$$x_4 = x_3 + \frac{1}{x_3^2} = \frac{9}{4} + \frac{1}{\left(\frac{9}{4}\right)^2} = \frac{793}{324}.$$

b) Para qualquer n, se $x_{n-1} \neq 0$, então $x_{n-1}^2 > 0$ e $\frac{1}{x_{n-1}^2} > 0$, pois todo quadrado de um número real não nulo é positivo. Assim,

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}^2} \\ &> x_{n-1}. \end{aligned}$$

Como $x_1 = 1 > 0$, pelo argumento anterior, temos $x_2 > x_1 > 0$. Agora, usando x_2 no papel de x_1 no argumento anterior, temos $x_3 > x_2 > 0$. Veja que podemos continuar repetindo o argumento, agora com x_3 no papel de x_2. Esse processo indutivo nos permite concluir que a sequência é estritamente crescente.

c) Elevando a equação de recorrência ao cubo teremos

$$\begin{aligned} x_n^3 &= \left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}^2}\right)^3 \\ &= x_{n-1}^3 + 3x_{n-1}^2\frac{1}{x_{n-1}^2} + 3x_{n-1}\frac{1}{x_{n-1}^4} + \frac{1}{x_{n-1}^6} \\ &> x_{n-1}^3 + 3. \end{aligned}$$

Logo,

$$y_n = x_n^3 > x_{n-1}^3 + 3 = y_{n-1} + 3.$$

d) A ideia agora é usar o crescimento de y_n para chegar em alguma conclusão sobre o crescimento de x_n. Temos $x_n > 2016$ se, e somente se, $y_n = x_n^3 > 2016^3$. No item anterior, provamos que $y_n > y_{n-1} + 3$ para todo $n \geq 2$. Aplicações sucessivas dessa desigualdade nos permitem concluir que:

$$\begin{aligned} y_n &> y_{n-1} + 3 \\ &> y_{n-2} + 6 \\ &> y_{n-3} + 9 \\ &\ldots \\ &> y_1 + 3(n-1) \\ &= 3n - 2. \end{aligned}$$

Bom, agora basta tomar N que satisfaça $3N - 2 > 2016^3$, ou seja, $N > \frac{2016^3+2}{3}$. Podemos tomar $N = 2016^3$, por exemplo, já que esse número satisfaz a inequação anterior. Para esse valor de N, o termo x_N da sequência será maior que 2016.

14.

a) Podemos preencher mais casas do tabuleiro exibido para encontrar a casa $(4, 4)$:

21	27					
15	20	26				
10	14	19	25			
6	9	13	18	24		
3	5	8	12	17	23	
1	2	4	7	11	16	22

Portanto, o número no quadradinho $(4, 4)$ é o 25.

b) O número da casa $(1, n)$ está em uma diagonal contendo as casas (x, y) tais que $x + y = n + 1$. Ou seja, na diagonal que o contém, existem n números, a saber, os números das casas $(1, n), (2, n-1), (3, n-2), \ldots, (n, 1)$. Repetindo essa contagem para os números das casas $(1, n-1), (1, n-2), \ldots, (1, 1)$, podemos constatar que já foram escritos $1 + 2 + \ldots + (n-1)$ números nas outras diagonais. Portanto, o número escrito na casa $(1, n)$ corresponde ao inteiro

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Assim, o número na casa $(1, 2016)$ é $\dfrac{2016 \cdot 2017}{2}$.

c) Como o quadradinho (m, n) está na diagonal contendo os quadradinhos (x, y) com $x + y = m + n$, inicialmente iremos descobrir o número escrito em $(m + n - 1, 1)$. Pelo item anterior, o quadradinho $(1, m + n - 2)$ possui o número $\dfrac{(m+n-2)(m+n-1)}{2}$. Portanto, o número escrito no quadradinho $(m + n - 1, 1)$ é $\dfrac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + 1$. Além disso, o quadradinho (m, n) é o $(n-1)$-ésimo sucessor do número escrito no quadradinho $(m + n - 1, 1)$, ou seja, o número

$$\begin{aligned} \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + 1 + (n-1) &= \\ \frac{m^2 + mn - m + mn + n^2 - n - 2m + 2}{2} &= \\ \frac{n(n+1) + m(m-1) + 2(m-1)(n-1)}{2} &= \\ \frac{n(n+1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} + (m-1)(n-1). \end{aligned}$$

Logo, o número escrito no quadradinho $(2013, 2017)$ é

$$\frac{2013 \cdot 2012}{2} + \frac{2017 \cdot 2018}{2} + 2012 \cdot 2016.$$

15. Dado n, Analisemos os pares de restos possíveis entre números de Fibonacci consecutivos. Como existe apenas um número finito de pares de restos, um deles irá se repetir. Digamos que, para $s < t$, tenhamos

$$\begin{array}{ll} F_s \equiv a \pmod{n} & F_{s+1} \equiv b \pmod{n} \\ F_t \equiv a \pmod{n} & F_{t+1} \equiv b \pmod{n} \end{array}$$

Daí,

$$\begin{aligned} F_{s-1} &= F_{s+1} - F_s \\ &\equiv F_{t+1} - F_t \pmod{n} \\ &= F_{t-1} \end{aligned}$$

Suponha que, para $k \in \mathbb{Z}$, tenhamos

$$F_{s-k} \equiv F_{t-k} \pmod{n}. \text{ e } F_{s-(k-1)} \equiv F_{t-(k-1)} \pmod{n}$$

Daí,

$$\begin{aligned} F_{s-(k+1)} &= F_{s-(k-1)} - F_{s-k} \\ &\equiv F_{t-(k-1)} - F_{t-k} \pmod{n} \\ &= F_{t-(k+1)} \end{aligned}$$

Segue, por indução, que

$$F_{s-k} \equiv F_{t-k} \pmod{n}$$

para todo inteiro positivo k. Escolhendo $s = k$, temos

$$0 = F_0 \equiv F_{t-s} \pmod{n}.$$

Ou seja, $n \mid F_{t-s}$. De modo análogo, podemos mostrar que

$$F_{s+k} \equiv F_{t+k} \pmod{n}$$

para todo inteiro k. Fazendo $k = l(t-s) - s$, segue que

$$F_{l(t-s)} \equiv F_{(l-1)(t-s)} \pmod{n}$$

Assim, todos os números da sequência $\{F_{l(t-s)}\}_{l \in \mathbb{N}}$ são múltiplos de n.

16. Da equação do enunciado, temos

$$a_{n+3} = \frac{a_n \cdot a_{n+2}}{a_{n+1}}.$$

Essa igualdade mostra que a seqüência tem período 4. De fato,

$$\begin{aligned} a_{n+4} &= \frac{a_{n+1} \cdot a_{n+3}}{a_{n+2}} \\ &= \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \cdot \frac{a_n \cdot a_{n+2}}{a_{n+1}} \\ &= a_n. \end{aligned}$$

Daí, $a_1 = a_1 = 4$, $a_2 = a_2 = 2$, $a_3 = a_3 = 1$ e $a_4 = (4 \cdot 1)/2 = 2$. Assim,

$$\begin{aligned} a_1^k + a_2^k + \cdots + a_{100}^k &= 25(a_1^k + a_2^k + a_3^k + a_4^k) \\ &= 25(4^k + 2^k + 1^k + 2^k) \\ &= 25(2^{2k} + 2 \cdot 2^k + 1) \\ &= [5(2^k + 1)]^2, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração.

PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM