Equações Algébricas - Propriedades das Raízes

Teorema da Decomposição

3° ano E.M.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Portal da Matemática
OBMEP

Equações Algébricas - Propriedades das Raízes
Teorema da Decomposição

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. A equação cujas raízes são 1 e -2 é:

a) $x^2 + 4x + 4 = 0$.

b) $x^2 - 2x + 1 = 0$.

c) $x^2 + x - 1 = 0$.

d) $x^2 + x - 2 = 0$.

e) $x^2 - x + 2 = 0$.

Exercício 2. Decompondo o primeiro membro da equação $x^2 - 8x + 12 = 0$, obtemos:

a) $(x-2)(x-4) = 0$.

b) $(x-1)(x+1) = 0$.

c) $(x-6)(x-2) = 0$.

d) $(x-8)(x+12) = 0$.

e) $(x-12)(x+8) = 0$.

Exercício 3. Fatore o polinômio $P(x) = 2x^3 - 8x$.

Exercício 4. Resolva a equação $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$.

Exercício 5. Escreva uma equação do 3^o grau cujas raízes são:

a) 0, 4 e 5.

b) $3+i$, $3-i$ e -1.

Exercício 6. O número de raízes da equação $(x-1)^3 \cdot (x+4)^2 \cdot (x-5) = 0$ é:

2.

3.

4.

5.

6.

Exercício 7. Se $x = -2$ é raiz da equação $x^3 + kx^2 - kx + 8 = 0$, então um dos fatores da função $f(x) = x^3 + kx^2 - kx + 8$ é:

a) $x - 1$.

b) $x - 2$.

c) $x + 2$.

d) $x - 6$.

e) $x - 8$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Escreva o polinômio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 30x = 0$, sendo -3 uma de suas raízes, na forma fatorada.

Exercício 9. A altura de um balão em relação ao solo foi observada durante certo tempo e modelada pela função $h(t) = t^3 - 30t^2 + 243t + 24$, com $h(t)$ em metros e t em minutos. No instante $t = 3$ o balão estava a 510 m de altura. Determine em que outros instantes t a altura também foi de 510 m.

Exercício 10. Utilize fatoração para resolver a equação $x^3 + 6x^2 + x + 6 = 0$.

Exercício 11. Sejam p, q e r as raízes da equação $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$, determine uma equação cujas raízes sejam $(p+1)$, $(q+1)$ e $(r+1)$.

Exercício 12. Sejam $x_1 = x_2 = i$ e $x_3 = x_4 = -i$ raízes da equação $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 6x^2 + x + 3 = 0$. Determine a quinta raiz.

Exercício 13. Se $x = 3$ é raiz da equação $x^3 - 2x^2 + x + p = 0$, determine p e escreva o primeiro membro da equação como o produto de dois polinômios.

Exercício 14. Duas das raízes da equação $2x^4 + 5x^3 - 35x^2 + px + q = 0$ são -3 e -4. Determine $p + q$.

Exercício 15. Se o polinômio $P(x) = 4x^4 - 4x^3 - 23x^2 - x - 6$ é divisível por $Q(x) = x^2 - x - 6$, determine as raízes da equação $4x^4 - 4x^3 - 23x^2 - x - 6 = 0$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. Sabendo que 1 é raiz do polinômio $p(x) = 2x^3 - ax^2 - 2x$, podemos afirmar que $p(x)$ é igual a:

a) $2x^2(x-2)$.

b) $2x(x-1)(x+1)$.

c) $2x(x^2-2)$.

d) $x(x-1)(x+1)$.

Exercício 17. A equação $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ tem como raízes $-\dfrac{1}{2}$, m e n. Então m^n é igual a:

a) -1 ou 0.

b) $-\dfrac{1}{2}$ ou 2.

c) -2 ou -1.

d) $\dfrac{1}{2}$ ou $-\dfrac{1}{2}$.

e) -2 ou 1.

Exercício 18. O polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + d$ é divisível por $(x-2)$.

a) Determine d.

b) Calcule as raízes de $p(x) = 10$.

Exercício 19. Um polinômio $p(x)$ possui grau 4 e é divisível simultaneamente por $f(x) = x^2 + 5$ e por $g(x) = 2x - 3$. Se p satisfizer as condições $p(-1) = 150$ e $p(2) = 63$, então a soma de todos os seus coeficientes é igual a:

a) -18.

b) -6.

c) -8.

d) -33.

e) -25.

Portanto, a soma dos coeficientes de $p(x)$ é $8 - 14 + 43 - 70 + 15 = -18$. Resposta A.

Exercício 20. Sejam a e b números reais não nulos. Se o número complexo $z = a + bi$ é uma raiz da equação quadrática $x^2 + bx + a = 0$, então:

a) $|z| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

b) $|z| = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

c) $|z| = \sqrt{3}$.

d) $|z| = \sqrt{3}$.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1. D.

2. C.

3.

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 - 8x \\ &= 2x(x^2 - 4) \\ &= 2x(x+2)(x-2). \end{aligned}$$

4. $x^3 - 7x^2 + 12x = x(x^2 - 7x + 12) = 0$, donde $x = 0$ ou $x^2 - 7x + 12 = 0$. Portanto $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 4$.

5.

a) Como as raízes são 0, 4 e 5, a equação deve ser do tipo $a(x-0)(x-4)(x-5) = 0$, sendo a um número qualquer, podendo inclusive ser imaginário. Tomando $a = 1$, por exemplo, teremos a equação $x^3 - 9x^2 + 20x = 0$.

b) Utilizando o mesmo raciocínio da letra "a", temos $a[x - (3+i)][x - (3-i)](x+1) = 0$, que para $a = 1$, por exemplo, temos $(x^2 - 6x + 10)(x+1) = x^3 - 5x^2 + 4x + 10 = 0$, que tem como raízes $x_1 = 3 + i$, $x_2 = 3 - i$ e $x_3 = -1$.

6. E.

7. C.

8. Como $x_1 = -3$ e $x_2 = 0$, pois o termo independente é zero, temos:

-3	1	3	-10	-30	0
0	1	0	-10	0	$\boxed{0}$
	1	0	-10	$\boxed{0}$	

Com as divisões acima, encontramos a equação $x^2 - 10 = 0$, cujas raízes são $-\sqrt{10}$ e $\sqrt{10}$. Portanto, $P(x) = x(x+3)(x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10})$.

9. (Extraído de # *Contato Matemático*) Temos que resolver a equação $t^3 - 30t^2 + 243t + 24 = 510$, sabendo que $t_1 = 3$, então:

3	1	-30	243	-486
	1	-27	162	$\boxed{0}$

Chegamos à equação $x^2 - 27x + 162 = 0$, cujas raízes são $t_2 = 9$ e $t_3 = 18$, ou seja, o balão atinge 510 m de altura aos 3, aos 9 e aos 18 minutos.

10.

$$\begin{aligned} x^3 + 6x^2 + x + 6 &= 0 \\ x^2(x+6) + (x+6) &= 0 \\ (x+6)(x^2+1) &= 0. \end{aligned}$$

Como o produto de dois termos é zero, então $x + 6 = 0$ ou $x^2 + 1 = 0$, segue que $x_1 = -6$, $x_2 = i$ e $x_3 = -i$.

11.

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - x + 2 &= 0 \\ x^2(x-2) - (x-2) &= 0 \\ (x-2)(x^2-1) &= 0 \\ (x-2)(x-1)(x+1) &= 0. \end{aligned}$$

Temos então que p, q e r são 2, 1 e -1, não necessariamente nesta ordem. Uma equação cujas raízes sejam 3, 2 e 0 é $(x-3)(x-2)x = 0$, que é o mesmo que $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$.

12. Utilizando as raízes dadas, temos:

i	1	3	2	6	1	3
$-i$	1	$3+i$	$1+3i$	$3+i$	$3i$	$\boxed{0}$
i	1	3	1	3	$\boxed{0}$	
$-i$	1	$3+i$	$3i$	$\boxed{0}$		
	1	3	$\boxed{0}$			

Basta agora resolvermos a equação $x + 3 = 0$, ou seja, $x_5 = -3$.

13. Como $x_1 = 3$ é raiz da equação, temos:

3	1	-2	1	p
	1	1	4	$\boxed{12+p}$

$12 + p = 0$, segue que $p = -12$. Além disso, encontramos outro fator da equação: $x^2 + x + 4 = 0$. Portanto, podemos escrever a equação dada como $(x-3)(x^2+x+4) = 0$.

14.
Fazendo $x = -4$ e $x = -3$, temos o sistema:

$$\begin{cases} 512 - 320 - 560 - 4p + q = 0 \\ 162 - 135 - 315 - 3p + q = 0. \end{cases}$$

Melhorando o sistema, chegamos a:

$$\begin{cases} -4p + q = 368 \\ -3p + q = 288. \end{cases}$$

Subtraindo as equações, ficamos com $p = -80$ e, consequentemente, $q = 48$. Portanto $p + q = -32$.

15. Como as raízes de $Q(x)$ são $x_1 = 3$ e $x_2 = -2$ e $Q(x)$ divide $P(x)$, então $x_1 = 3$ e $x_2 = -2$ também são raízes de $P(x)$. Temos então:

$$\begin{array}{c|ccccc}
3 & 4 & -4 & -23 & -1 & -6 \\
\hline
-2 & 4 & 8 & 1 & 2 & \boxed{0} \\
\hline
 & 4 & 0 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

As outras raízes de $P(x)$ são também raízes de $4x^2 + 1 = 0$, ou seja, $x_3 = \dfrac{i}{2}$ e $x_4 = -\dfrac{i}{2}$.

16. (Extraído da PUC RJ - 2014) Se 1 é raiz de $p(x)$, então $2 \cdot 1^3 - a \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 0$, segue que $a = 0$. Portanto, $p(x) = 2x^3 - 2x = 2x(x^2 - 1) = 2x(x-1)(x+1)$. Resposta B.

17. (Extraído da Mackenzie - 2016) Usando $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, temos:

$$\begin{array}{c|cccc}
-\frac{1}{2} & 2 & 3 & -3 & -2 \\
\hline
 & 2 & 2 & -4 & \boxed{0}
\end{array}$$

Assim, m e n são as raízes da equação $2x^2 + 2x - 4 = 0$, que são -2 e 1. Então m^n pode ser $1^{-2} = 1$ ou $(-2)^1 = -2$. Resposta E.

18. (Extraído da PUC RJ)

a) Se $p(x)$ é divisível por $(x-2)$, então $p(2) = 0$. Assim, $2^3 - 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + d = 0$, segue que $d = 10$.

b) Se $p(x) = 10$, então $x^3 - 2x^2 - 5x = 0$, que pode ser escrita como $x(x^2 - 2x - 5) = 0$, sendo suas raízes: $x_1 = 0$ e $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{24}}{2} = 1 \pm \sqrt{6}$, ou seja, $x_2 = 1 + \sqrt{6}$ e $x_3 = 1 - \sqrt{6}$.

19. (Extraído da UDESC - 2015) Temos $p(x) = a(x^2 + 5)(2x-3)(x-b)$. Se $p(2) = 63$ e $p(-1) = 150$, então:

$$\begin{cases} a \cdot 9 \cdot 1 \cdot (2-b) & = & 63 \\ a \cdot 6 \cdot (-5) \cdot (-1-b) & = & 150. \end{cases}$$

Segue que:

$$\begin{cases} a & = & \dfrac{7}{(2-b)} \\ a & = & \dfrac{5}{1+b}. \end{cases}$$

Igualando as equações, temos $\dfrac{7}{2-b} = \dfrac{5}{1+b}$, donde $7b + 7 = 10 - 5b$, segue que $b = \dfrac{1}{4}$ e, consequentemente, $a = 4$. Assim:

$$\begin{aligned}
p(x) &= 4(x^2+5)(2x-3)\left(x - \frac{1}{4}\right) \\
&= (x^2+5)(2x-3)(4x-1) \\
&= (2x^3 - 3x^2 + 10x - 15)(4x-1) \\
&= 8x^4 - 2x^3 - 12x^3 + 3x^2 + 40x^2 - 10x - 60x + 15 \\
&= 8x^4 - 14x^3 + 43x^2 - 70x + 15.
\end{aligned}$$

20. (Extraído da Unicamp - 2017) Como $z = a + bi$ é raiz, então $\overline{z} = a - bi$. Substituindo estas raízes na equação, temos:

$$\begin{cases} (a+bi)^2 + b(a+bi) + a & = & 0 \\ (a-bi)^2 + b(a-bi) + a & = & 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 2abi - b^2 + ab + b^2 i + a & = & 0 \\ a^2 - 2abi - b^2 + ab - b^2 i + a & = & 0. \end{cases}$$

Subtraindo as equações, ficamos com $4abi + 2b^2 i = 0$, ou seja, $2a + b = 0$ (I), pois $b \neq 0$; e somando as equações, obtemos $2a^2 - 2b^2 + 2ab + 2a = 0$, ou seja, $a^2 - b^2 + ab + a = 0$ (II). Substituindo (I) em (II), temos $a^2 - 4a^2 - 2a^2 + a = -5a^2 + a = 0$, donde $a = \dfrac{1}{5}$, pois $a \neq 0$, e, consequentemente, $b = -\dfrac{2}{5}$. Por fim, $|z| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 + \left(-\dfrac{2}{5}\right)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Resposta B.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com