Tópicos Adicionais

Introdução à Teoria dos Grafos

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Grafos
Tópicos Adicionais

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Existe algum grafo com 8 vértices de graus $3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4$?

Exercício 2. Um grafo completo com n vértices, denotado por K_n, é um grafo em que todo par de vértices forma uma aresta. Qual o número de arestas de um K_n?

Exercício 3. Em Brasilândia, existem apenas 9 casas muito distantes entre si. É possível que cada casa esteja ligada a exatamente 7 outras casas através de estradas?

Exercício 4. Prove que numa festa com 31 pessoas, existe uma pessoa que conhece um número par de outras pessoas.

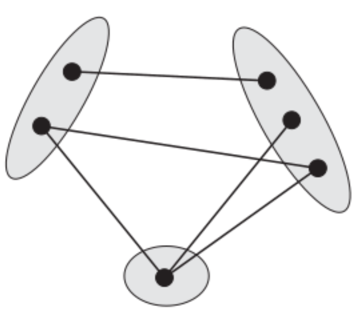
Exercício 5. Tuvalu possui 10 cidades, chamadas $H_1, H_2, \ldots, H_{10}$, e algumas delas são ligadas por estradas de mão dupla. Sabe-se que é possível chegar de H_1 a H_{10}. Mostre que uma das situações abaixo ocorre:

(i) Existe um caminho ligando H_1 a H_{10} utilizando no máximo 3 estradas.

(ii) Existem duas cidades H_i e H_j, $2 \leq i < j \leq 9$, tais que todo caminho ligando H_1 a H_{10} passa por H_i ou H_j.

Exercício 6. Em um certo país há 21 cidades e o governo pretende construir n estradas (todas de mão dupla), sendo que cada estrada liga exatamente duas das cidades do país. Qual o menor valor de n para que, independente de como as estradas sejam construídas, seja possível viajar entre quaisquer duas cidades (passando, possivelmente, por cidades intermediárias)?

Exercício 7. Um grafo $G = (V, E)$ é chamado *r-partido* se V admite uma partição em r classes de modo que toda aresta tem seus vértices em classes diferentes e, além disso, vértices em uma mesma partição não podem ser adjacentes. Em vez de dizer 2-partido, usaremos a palavra *bipartido*. Prove que um grafo conexo[1] é bipartido se, e somente se, não contém ciclos de tamanho ímpar.



Exercício 8. Em um torneio de xadrez, cada um dos participantes jogou exatamente uma vez com cada um dos demais e não houve empates. Mostre que existe um jogador P tal que, para qualquer outro jogador Q, distinto de P, uma das situações a seguir ocorre:

i) Q perdeu de P;

ii) Q perdeu de alguém que perdeu de P.

[1] Não é difícil verificar que um grafo é *bipartido* se, e somente se, todas as suas componentes conexas são bipartidas. Assim, o resultado do exercício também vale sem a hipótese de conexidade

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. (a) Em uma festa com 23 pessoas, é possível que cada um possua 1, 3 ou 5 amigos na festa?

(b) É possível desenhar 9 segmentos de reta no plano de tal forma que cada um intersecta exatamente 3 outros?

Exercício 10. Prove que numa festa com n pessoas, o número de pessoas que conhecem um número ímpar de outras pessoas na festa é par.

Exercício 11. Suponha que o grafo G possui um ciclo C e que existe um caminho L em G de comprimento pelo menos k entre dois vértices de C. Mostre que G contém um ciclo de comprimento pelo menos $\sqrt{k}$.
Observação: O comprimento de um caminho é o número de arestas que o compõe.

Exercício 12. Prove que numa festa com n pessoas, existem duas com o mesmo número de amigos.

Exercício 13. Cientistas estão reunidos para um congresso matemático. Sabe-se que dois cientistas com o mesmo número de amigos não possuem amigos em comum. Se existem cientistas que se conhecem, prove que existe um cientista que possui apenas um amigo.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 14. Prove que numa festa com $2n$, pessoas existem duas com um número par de amigos em comum.

Exercício 15. Existem 1000 cidades em Pavilândia e alguns pares de cidades são ligadas por uma estrada de terra. É possível viajar de uma cidade para qualquer outra através das estradas de terra. Prove que o governo de Pavilândia pode pavimentar algumas estradas de modo que de cada cidade saia um número ímpar de estradas pavimentadas.

Exercício 16. João pintou um tabuleiro retangular 2010×2010, que estava dividido em quadradinhos de modo usual, com 13 cores. Um par de cores é bacana se existem quadradinhos vizinhos pintados com essas cores. Qual o menor número de pares bacanas que podem ter sido encontrados por João?

Exercício 17. Existem 1999 cidades e 4000 estradas em um certo país(cada estrada conecta duas cidades). Prove que existe um caminho fechado passando através de não mais que 20 cidades.

Exercício 18. Quaisquer duas da 101 cidades de Gugulândia são conectadas por não mais que uma estrada de mão única. Sabemos que existem exatamente 40 estradas saindo e 40 estradas entrando em cada cidade. Prove que uma pessoa pode chegar em qualquer cidade partindo de qualquer outra dirigindo através de não mais que duas cidades.

Exercício 19. (Rússia) Uma cidade tem a forma de um tabuleiro $(m-1) \times (n-1)$ dividido em quadrados(existem m ruas verticais e n ruas horizontais). Nas ruas da cidade, mas não nos cruzamentos das ruas, existem guardas de trânsito. Cada guarda informa a placa do carro que passa, a direção com que se desloca e a hora em que passou. Qual é a menor quantidade de guardas que precisamos colocar, para conhecermos o caminho de qualquer carro que se mova em um circuito fechado?

Observação: Um circuito não passa duas vezes por um mesmo ponto.

Exercício 20. Em uma festa, existem $2n+1$ pessoas. Sabemos que para qualquer grupo de n pessoas, existe uma pessoa fora do grupo que as conhecem. Mostre que existe uma pessoa que conhece todos na festa.

Exercício 21. Vinte times de futebol participam de um torneio. No primeiro dia todos os times jogam uma partida. No segundo dia, todos os times jogam outra partida. Prove que é possível, após o segundo dia, escolher um grupo de 10 times de modo que entre eles não tenha acontecido nenhuma partida.

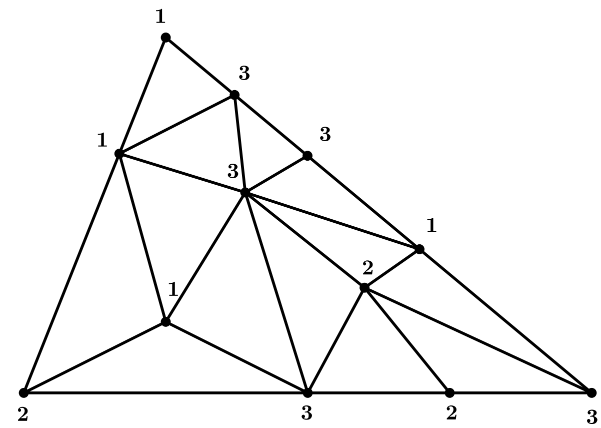
Exercício 22. Duzento estudantes participaram de uma competição de matemática consistindo de seis problemas. Sabe-se que cada problema foi resolvido corretamente por pelo menos 120 estudantes. Prove que existem dois estudantes que juntos resolveram todos os seis problemas.

Exercício 23. Bruno pintou k casas de um tabuleiro $n \times n$ de preto. Ele observou que não existiam quatro casas pretas formando um um retângulo com lados paralelos aos lados do tabuleiro. Mostre que:

$$k \leq n\left(\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}\right).$$

Exercício 24. Seja S um conjunto de $n \geq 3$ pontos no espaço. Os segmentos unindo esses pontos têm comprimentos distintos e r desses segmentos são coloridos de vermelho. Seja m o menor inteiro tal que $m \geq \dfrac{2r}{n}$. Prove que sempre existe um caminho de m segmentos vermelhos com seus comprimentos sucedendo-se de maneira crescente.

Exercício 25. (Lema de Sperner) Um triângulo é dividido em triângulos menores de modo que quaisquer dois dentre os triângulos menores ou não têm ponto em comum, ou têm um vértice em comum, ou têm um lado (completo) em comum. Os vértices do triângulo maior são numerados: 1, 2, 3. Os vértices dos triângulos menores também são numerados: 1, 2 ou 3. A numeração é arbitrária, exceto que os vértices sobre o lado do triângulo maior oposto ao vértice i $(i = 1, 2, 3)$ não podem receber o número i (veja a figura). Mostre que entre os triângulos menores existe um cujos vértices são numerados com 1, 2, 3.



Respostas e Soluções.

1. Como a soma dos graus conta cada aresta duas vezes, ela deve ser um número par. Entretano, $3+3+3+3+3+3+3+4=25$ é impar. Portanto, não existe tal grafo.

2. O número de arestas é o número de pares de vértices, ou seja, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

3. Some a quantidade de estradas que saem de cada casa. Bem, facilmente obtemos $7 \times 9 = 63$ estradas. Como cada estrada liga duas cidades, cada uma foi contada duas vezes. Logo o número obtido tem que ser par. Esse absurdo mostra que tal configuração não é possível.

4. Suponha, por absurdo, que não existe uma pessoa que conhece um número par de outras pessoas. Somando as quantidades de amigos de cada pessoa, como 31 é ímpar, obtemos um número ímpar. Entretanto, como cada relação de amizade é contada duas vezes, esse número é par. Isso é um absurdo.

5. Se H_1 ou H_{10} estão ligadas a no máximo duas cidades, a condição $ii)$ é claramente satisfeita, pois todo caminho ligando H_1 a H_{10} deve passar por elas. Suponha então que H_1 está ligada a A_1, A_2 e A_3 e que H_{10} está ligada a B_1, B_2 e B_3 (eventualmente podem existir mais cidades ligadas a H_1 e H_{10}). Se $\{H_1, A_1, A_2, A_3\} \cap \{H_{10}, B_1, B_2, B_3\} \neq \emptyset$, então existe um caminho ligando H_1 a H_{10} usando no máximo 2 estradas. Se isso não acontece e existe alguma estrada conectando uma cidade do conjunto $\{A_1, A_2, A_3\}$ a uma cidade de $\{B_1, B_2, B_3\}$, então teremos um caminho entre H_1 e H_{10} utilizando 3 estradas e $i)$ é verificado. Finalmente, resta analisarmos a situação em que $\{H_1, A_1, A_2, A_3\} \cap \{H_{10}, B_1, B_2, B_3\} = \emptyset$ e que não existe uma estrada entre A_i e B_j, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Nesse caso, como existem apenas 10 cidades e o grafo é conexo, qualquer caminho que una H_1 a H_{10} deve passar por uma das duas cidades que não está no conjunto $\{H_1, H_{10}, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3\}$. Ou seja, $ii)$ é verificada. Em qualquer um dos casos analisados anteriormente, $i)$ ou $ii)$ é verificado.

6. (Extraído da OBM) Considere o grafo que representa as cidades como vértices e as estradas como arestas. Se o governo construir todas as estradas de um grafo completo de 20 vértices e deixar uma cidade isolada, a conexidade não será estabelecida. Portanto, $n > \binom{20}{2} = 190$. Por outro lado, se o governo construir 191 estradas, o grafo não poderá possuir mais de uma componente conexa e, portanto, será conexo. De fato, suponha que exista mais de uma componente conexa e seja k, com $1 \leq k \leq 20$ o número de vértices dela. Como não devem existir arestas entre essa componente e as componentes que contém os outros $21-k$ vértices, o total de arestas do grafo não é maior que

$$\begin{aligned}
\binom{k}{2} + \binom{21-k}{2} &= \\
\frac{k(k-1)}{2} + \frac{(21-k)(20-k)}{2} &= \\
k^2 - 21k + 210 &= \\
(k-21/2)^2 + 399/4 &\leq \\
(19/2)^2 + 399/4 &= 190.
\end{aligned}$$

Isso é um absurdo. Assim, o menor valor de n é 191.

7. Suponha inicialmente que G é conexo e não possui ciclos de tamanho ímpar e seja T uma árvore geradora de G. Se r é uma folha de G, então todos os outros vértices do grafo podem ser numerados de acordo como o número de arestas do caminho que os une a r (r será numerado com 0). Essa numeração dos vértices de G determina dois conjuntos: V_1, constituído pelos vértices com números ímpares, e V_2, constituído pelos vértices com número par. As aresta em T ligam apenas vértices de paridades distintas e, portanto, em conjuntos distintos. Além disso, como não existem ciclos de tamanho ímpar, as arestas de G que não estão na árvore T, devem ligar dois vértices de conjuntos diferentes. Isso mostra que G é *bipartido*. Por outro lado, se G é *bipartido*, com $V = V_1 \cup V_2$, como não podem existir arestas entre dois vértices de uma mesma classe, qualquer ciclo deve apresentar vértices alternados entre essas classes e assim possuem tamanho par.

8. Seja P o jogador que mais venceu partidas no torneio. Digamos que P tenha vencido dos jogadores do cojunto $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$. Considere um jogador qualquer Q diferente que P. Se Q perdeu para P, ele satisfaz o item $i)$. Se além de vencer P, Q também ganhou de todos os elementos de S, então ele terá mais vitórias que P. Esse absurdo mostra que se Q tiver ganho de P, então ele perdeu para alguém de S e assim $ii)$ é verdadeira. Em qualquer caso, $i)$ ou $ii)$ é satisfeita.

9.

(a) A soma das quantidades de amigos de cada pessoa é o dobro da quantidade de relações de amizades totais, pois cada uma é contada duas vezes. Como uma soma de 23 números ímpares é sempre um ímpar, não é possível que todos na festa possuam apenas 1, 3 ou 5 amigos.

(b) Considere um grafo em que cada vértice representa um segmento e que uma aresta liga dois deles se os segmentos correspondentes se intersectam. O grafo resultante precisa ter 9 vértices e o grau de cada um deles tem que ser 3. De modo análogo ao item anterior, como a soma dos graus é $9 \cdot 3 = 27$, esse grafo não existe. Assim, a condição sobre a interseção dos 9 segmentos não pode ser realizada.

10. Numere as pessoas de 1 até n e denote por d_i o número de amigos da pessoa i. Imagine que existe um fio entre duas pessoas que se conhecem. Se E denota a quantidade de fios, temos

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2E,$$

pois cada fio é contado duas vezes, um para cada ponta. Como o lado direito é par, no lado esquerdo devemos ter uma quantidade par de números ímpares.

11. Se o ciclo C possui comprimento pelo menos $\sqrt{k}$, não há o que fazer. Suponhamos então que o tamanho de C é menor que $\sqrt{k}$ e denote os seus vértices de forma consecutiva por x_1, x_2, ..., x_t. Assim, $t < \sqrt{k}$. Considerando as interseções de L com o ciclo C, podemos decompô-lo em caminhos disjuntos conectando dois vértices de $\{x_1, x_1, \ldots, x_t\}$. Como o comprimento de L é de pelo menos k e $t \leq \sqrt{k} - 1$, pelo menos um desses caminhos entre dois vértices de C, digamos x_i e x_j, tem comprimento de pelo menos $\dfrac{k}{\sqrt{k}-1} > \sqrt{k}+1$. Acrescentando-se as arestas que unem x_i e x_j em C, temos um ciclo com pelo menos $\sqrt{k}+1 > \sqrt{k}$ arestas.

12. Cada pessoa da festa possui uma quantidade de amigos que é um elemento do conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Entretanto, não é possível que simultaneamente uma pessoa tenha 0 e outra $n-1$ amigos. Portanto, existem apenas $n-1$ valores possíveis para as quantidades de amigos das n pessoas. Daí, pelo Princípio da Casa dos Pombos, duas delas devem possuir a mesma quanntidade de amigos.

13. Sejam P o cientista com a maior quantidade de amigos, digamos $P_1, P_2, \ldots, P_k$, e d_i a quantidade de amigos de P_i, $1 \leq i \leq k$. Portanto, $d_1, d_2, \ldots, d_k \leq k$. Suponha que não exista $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ para o qual $d_i = 1$, assim

$$d_1, d_2, \ldots, d_k \geq 2$$

e daí

$$\{d_1, \ldots, d_k\} \subseteq \{2, 3, \ldots, k\}.$$

Pelo Princípio da Casa dos Pombos, existem $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tais que $d_i = d_j$. Isso diz que P_i e P_j têm a mesma quantidade de amigos, o que contraria as condições do problema, uma vez que ambos conhecem P.

14. Suponha que quaisquer duas pessoas tenham um número ímpar de amigos em comum e seja A um dos participantes da festa. Seja $M = \{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ o conjunto dos amigos de A. Considere uma nova festa restrita apenas ao conjunto M. Como cada F_i tem um número ímpar de amigos em comum com A, na nova festa, cada F_i possui um número ímpar de amigos. Pelo exemplo anterior, k deve ser par. O mesmo argumento vale para qualquer pessoa na festa e consequentemente todos conhecem um número par de pessoas. Peça para cada um dos amigos de A fazerem uma lista de seus amigos diferentes de A. A soma da quantidade de nomes listados é par, pois é uma soma de uma quantidade par (igual a k) de números ímpares (cada F_i possui um número ímpar de amigos diferentes de A). Agora comparemos o número de aparições de cada uma das $2n-1$ pessoas diferentes de A nessas listas. Se cada uma aparecer em um número ímpar de listas, a soma total de todos os nomes em todas as listas seria ímpar (Lembre-se que a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é ímpar!). Mas isso é uma contradição. Logo, existem duas pessoas na festa com um número par de amigos em comum.

15. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_{1000}$ as cidades de Pavilândia. Como o grafo resultante é conexo, existe um caminho L_i entre as cidades v_{2i-1} e v_{2i} para $i \in \{1, 2, \ldots, 500\}$. Para cada caminho, marque cada uma de suas arestas com uma etiqueta L_i. Em seguida, pavimente as arestas que receberam um número ímpar de etiquetas. Perceba que um vértice qualquer, quando interior a um desses caminhos, será extremo de exatamente duas arestas que receberão etiquetas. Além disso, cada vértice é extremo de exatamente um caminho. Portanto, a quantidade de etiquetas distribuídas nas arestas incidentes de um determinado vértice é ímpar e assim a quantidade de arestas incidentes pavimentadas também será ímpar.

16. Considere um grafo G em que os vértices são as 13 cores. Dois deles serão unidos por uma aresta se no tabuleiro pintado por João existirem dois quadradinhos vizinhos com essas cores. Dados quaisquer dois quadradinhos, é sempre possível criar um caminho passando por quadradinhos vizinhos do tabuleiro começando em um deles e terminando no outro. Isso significa que G é conexo. Como todo grafo conexo de n vértices possui uma árvore geradora, G possui pelo menos $13 - 1 = 12$ arestas, ou seja, existem pelo menos 12 pares bacanas. Para mostrar que esse mínimo pode ser atingido, considere a numeração natural das linhas e colunas com os números do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2010\}$ e distribua 12 das 13 cores nos quadradinhos de posições:

$$(1,1), (1,3), (1,5), (1,7), (1,9), (1,11), (1,13), (1,15),$$
$$(1,17), (1,19), (1,21), (1,23).$$

Preencha os quadradinhos restantes com a cor que não foi usada.

17. Considere o grafo G que possui as cidades como vértices e as estradas como arestas. Delete os vértices juntamente com suas arestas incidentes se o seu grau é menor que 3. Como $2 \cdot 1999 < 4000$, eventualmente irão sobrar estradas e cidades após esse processo. Assim, podemos assumir que todos os vértices de G possuem pelo menos grau 3. Escolha um vértice qualquer de G, que será chamado de patamar T_0. A seguir, descreveremos uma construção indutiva de conjuntos de vértices. As cidades que podem ser acessadas a partir de T_0 serão denotadas por T_1. As que podem ser acessadas a partir de T_1 e ainda não estão em $\{T_0, T_1\}$ serão chamadas de T_2. Continuando esse processo, podemos definir $T_3, T_4, \ldots$ Como cada vértice de G possui grau pelo menos 3, então cada T_i possui pelo menos o dobro de vértices de T_{i-1}. Se existirem mais de 10 patamares, o número de cidades será de pelo menos

$$\begin{aligned} |T_0| + |T_1| + |T_2| + \ldots + |T_{10}| &\geq \\ 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{10} &= \\ 2047 &> \\ 1999 &. \end{aligned}$$

Esse absurdo mostra que existem no máximo 10 patamares. Isso significa que, para algum $i \leq 9$, as cidades que podem ser acessadas a partir de T_i estão em $\{T_0, T_1, \ldots, T_{i-1}\}$ e isso gera um ciclo com não mais que 20 cidades.

18. Suponha que queiramos ir da cidade A para a cidade B. Se existe uma estrada de A para B, não há o que provar. Sejam $S_1 = \{A_1, A_2, \ldots, A_{40}\}$ as cidades que podem ser acessadas a partir de A e $S_2 = \{B_1, B_2, \ldots, B_{40}\}$ as cidades que podem acessar B. Se $A_i = B_j$ para algum par (i, j), basta considerar o caminho $A \to A_i = B_j \to B$. Suponha agora que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Existem $40 \cdot 40 = 1600$ estradas saindo de cidades de S_1. Algumas dessas estradas podem ir para elementos do próprio conjunto S_1, mas elas não ultrapassam a quantidade de $\binom{40}{2} = 780$ estradas. Além disso, no máximo $40 \cdot 19 = 760$ dessas estradas acessam alguma das 19 cidades que não estão em $S_1 \cup S_2 \cup \{A, B\}$. Como $1600 > 760 + 780$, alguma dessas estradas deve acessar alguma cidade de S_2, digamos que A_i acessa B_j, então $A \to A_i \to B_j \to B$ é um caminho entre A e B que passa por não mais que duas outras cidades.

19. Considere os $m \cdot n$ pontos de interseção das ruas como os vértices de um grafo G. As arestas serão os segmentos contidos em uma mesma rua conectando dois vértices vizinhos. Seja k a quantidade mínima de guardas necessários para que conheçamos o caminho de qualquer carro. Considerando um exemplo com a quantidade mínima de guardas, podemos a partir de G construir dois grafos com os mesmos mn vértices: o grafo G_1 com as arestas que contém guardas e o grafo G_2 com as arestas que não contém guardas. Como o grafo G_2 não contém ciclos, cada uma de suas componentes conexas é uma árvore e, consequentemente, a quantidade de arestas de cada uma é uma unidade inferior ao número de vértices da respectiva componente. Portanto, o número máximo de arestas de G_2 é no máximo $mn - 1$. Consequentemente, o número de arestas de G_1, que coincide com o número mínimo de guardas, é pelo menos $m(n-1) + n(m-1) - (mn-1) = mn - m - n + 1$. De fato, com esse número é possível montar um exemplo de modo que todo carro que percorra um caminho fechado terá sua trajetória conhecida. Basta colocar um guarda em todas as arestas que não estão na rua mais abaixo e mais a direita do tabuleiro. A quantidade de guardas necessários para isso é $(m-1)(n-1) = mn - m - n + 1$.

20. Vamos mostrar recursivamente que dentro da festa é possível encontrarmos um grafo completo K_l para todo $l \leq n + 1$. Considere duas pessoas, denotadas por P_1 e P_1, que se conhecem e um grupo de outras $n - 2$ pessoas. A união delas forma um grupo de n pessoas. Pelo enunciado, deve existir uma pessoa P_3 que conhece todas elas. Assim, $\{P_1, P_2, P_3\}$ fazem parte de um K_3. Considerando o conjunto $\{P_1, P_2, P_3\}$ e $n - 3$ outras pessoas, é possível encontrar uma pessoa P_4 que conhece todas elas. Assim, $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ fazem parte de um grafo completo K_4. Suponha que $i \leq n$ e que $\{P_1, P_2, \ldots, P_i\}$ fazem parte de um K_i. Unindo $n - i$ outras pessoas a esse conjunto, obtemos um grupo de n pessoas. Se P_{i+1} é a pessoa que os conhece, então $\{P_1, P_2, \ldots, P_{i+1}\}$ fazem parte de um grafo completo K_{i+1}. A repetição desse argumento nos permite encontrar um grafo completo K_{n+1}. O grupo formado pelas $2n + 1 - (n + 1) = n$ pessoas que não estão em K_{n+1} é conhecido por uma pessoa P que está no K_{n+1}. Então P é uma pessoa que conhece todos na festa.

21. Considere um grafo em que os vértices são os 20 times de futebol. Trace uma aresta vermelha entre dois times se eles jogaram entre si no primeiro dia e uma aresta azul se eles jogaram no segundo dia. Como todo vértice tem grau 2, a componente conexa de um time qualquer deve possuir ciclos, pois não pode ser uma árvore. Além disso, como todos os vértices de um ciclo possuem grau 2, a componente conexa só pode ser um único ciclo. Além disso, como as arestas em um ciclo devem possuir cores alternadas, uma vez que nenhum time joga duas vezes no mesmo dia, podemos concluir que todas as componentes conexas são ciclos de tamanho par. Basta escolher metade dos times de cada componente conexa, escolhendo-os de modo alternado, para obter um grupo de 10 times que não jogaram entre si.

22. Primeira Solução: Façamos um tabuleiro 200×6 representando o resultado dos estudantes. Cada linha representará um estudante e cada problema resolvido pelo estudante i será marcado com o número 1 na tabela. Caso o problema não tenha sido resolvido, marcaremos o número zero. Pensemos inicialmente em casos extremais. O que acontece se um estudante resolveu os seis problemas? Basta escolhermos um estudante qualquer e a dupla desejada estará formada. Se um estudante resolveu 5 problemas, também podemos obter facilmente nossa dupla. E se um estudante tiver resolvido exatamente 4 problemas? Suponha, sem perda de generalidade, que ele não resolveu os problemas 5 e 6. Sabemos que pelo menos 120 pessoas resolveram o problema 5. Se nenhuma delas tiver resolvido o problema 6, saberemos que no máximo 80 pessoas o resolveram. Mas isso contradiz o enunciado e assim temos certeza que pelo menos uma pessoa resolveu ambos os problemas. Resta mostrar que esse tipo de situação sempre acontece, i.e., existe alguém que resolveu pelo menos 4 problemas. Agora usaremos a contagem dupla. A soma dos número das colunas é pelo menos $6 \times 120 = 720$. Como existem 200 linhas, pelo menos uma delas terá soma $\frac{720}{200} > 3$, ou seja, pelo menos uma linha terá 4 números 1's.

Segunda solução: Suponha que a afirmação é falsa, i.e., para cada par de estudantes, existe pelo menos um problema que não foi resolvido por eles. Façamos uma matriz 200×6 como anteriormente. Para cada par de linhas j e k, cole uma etiqueta E_{jk} ao problema i se ele não foi resolvido pelos estudantes correspondentes. Contemos o número de etiquetas utilizadas. Para cada par de linhas, devemos usar pelo menos uma etiqueta. Logo o número mínimo de etiquetas é $\binom{200}{2}$. Como cada problema foi resolvido por pelo menos 120 estudantes, os seis problemas podem receber no máximo $6 \cdot \binom{80}{2}$ etiquetas. Como $\binom{200}{2} < 6 \cdot \binom{80}{2}$, temos um absurdo.

23. Ao pintar duas casas pretas em uma mesma linha, Bruno cria um empedimento para sua pintura: não poderá pintar outras duas casas pretas nessas colunas. Comecemos contando esses empedimentos. Denotemos por a_i o número de casas pintadas na linha i, então $\sum_{i=1}^{n} a_i = k$. Para cada par de casas pintadas na linha i, associemos uma etiqueta E_{jk} se essas casas estão nas colunas j e k. O número de etiquetas

utilizadas é
$$\sum_{i=1}^{n}\binom{a_i}{2},$$
pois em cada linha temos $\binom{a_i}{2}$ pares de quadrados pintados. Como não podemos repetir etiquetas, pois assim formaríamos um quadrado, o número máximo de etiquetas utilizadas é $\binom{n}{2}$. Logo,
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\binom{a_i}{2} &\leq \binom{n}{2}\\ \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2-a_i}{2} &\leq \frac{n^2-n}{2}.\end{aligned}$$
Pela desigualdade de Cauchy, $(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)n \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 = k^2$, consequentemente,
$$\frac{k^2}{2n}-\frac{k}{2n} \leq \frac{n^2-n}{2}$$
Estudando o sinal da inequação do segundo grau em k, obtemos que,
$$k \leq n\left(\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}\right).$$

24.
Descreveremos a seguir um algoritmo de busca para caminhos com comprimentos sucedendo-se de maneira crescente. Em cada vértice do conjunto S, coloque um homem. No primeiro toque de uma sirene, os homens que estão no segmento de menor comprimento caminham sobre ele e trocam de posição. No segundo toque da sirene, os homens que estão no segundo menor segmento caminham sobre ele e trocam de posição. Repita esse processo de toques de sirene associados aos caminhos ordenados de modo crescente. Como a cada toque dois deles andam, ao todo serão percorridos $2r$ segmentos. Além disso, dado que existem n homens, pelo Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos um deles terá andado $\left\lceil \frac{2r}{n} \right\rceil m$ segmentos e os terá percorrido em ordem crescente de comprimentos.

25. Uma boa estratégia seria pensar numa versão particular do problema. Olhando para o bordo do triângulo, temos uma situação semelhante ao problema inicial com uma dimensão e uma cor a menos. Consideremos, por exemplo, o lado dos vértices 1 e 2, poderíamos provar que dentre os segmentos da divisão deste lado, sempre existe um número ímpar de segmentos com as cores 1 e 2. Imagine uma pessoa com uma bandeira abaixada no vértice 1 caminhando em direção ao vértice 2. Ao passar por um vértice vermelho, a pessoa deve levantar a bandeira e ao passar por um vértice branco a pessoa deve abaixar a bandeira. Ao final do trajeto, a bandeira estará abaixada e consequentemente a pessoa terá realizado um número ímpar de movimentos de abaixar e levantar a bandeira. Mas cada movimento de abaixar ou levantar a bandeira corresponde a um segmento com as cores 1 e 2. Outro modo de ver isso, é perceber que a adição de um vertice de qualquer uma das duas cores, não altera a paridade da quantidade de segmentos com vértices de cores diferentes. Agora tentemos usar essa informação para resolver o problema. Contaremos o número de segmentos $\overline{12}$ (com algumas repetições). Eles aparecem nos triângulos de vértices $\overline{123}, \overline{122}$ e $\overline{112}$. Digamos que há x triângulos $\overline{123}$, y triângulos $\overline{122}$ e z triângulos $\overline{112}$. Observe que os segmentos internos ao triângulo grande são contados duas vezes (eles são comuns a dois triângulos) e os segmentos do lado do triângulo grande, somente uma vez. Notemos também que os segmentos $\overline{12}$ aparecem duas vezes nos triângulos $\overline{122}$ e $\overline{112}$ e uma vez nos triângulos $\overline{123}$. Assim,
$$\begin{aligned}2\times\text{segmentos interiores }\overline{12}+\text{segmentos nos lados }\overline{12} &=\\ \text{número de segmentos }\overline{12} &=\\ x+2y+2z &.\end{aligned}$$
Como existe uma quantidade ímpar de segmentos nos lados, concluímos que x é ímpar.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com