Números Complexos - Forma Algébrica

Divisão e conjugado de um número complexo na forma algébrica

3° **ano E.M.**

Números Complexos - Forma Algébrica
Divisão e conjugado de um número complexo na forma algébrica

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Considere o modelo:

$$\begin{aligned}\frac{2+i}{1-3i} &= \frac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}\\ &= \frac{5+5i}{10}\\ &= 1/2+i/2.\end{aligned}$$

Determine a forma algébrica dos seguintes números complexos:

a) $z = 1/(3+2i)$.

b) $z = i/(1+i)$.

c) $z = (8+6i)/(3+i)$.

Exercício 2. Escreva na forma algébrica os conjugados dos seguintes números complexos:

a) $z = 3+2i$

b) $z = 1/(1+i)$

c) $z = (1+i)^2$

Exercício 3. Determine o valor das expressões algébricas

a) $(1+i)\cdot\left(\dfrac{2+3i}{1+4i}\right)$

b) $\dfrac{2+i}{1+i}+\dfrac{2+3i}{1+4i}$

c) $\left(\dfrac{15+8i}{3+2i}\right)\cdot\left(\dfrac{2+i}{4+i}\right)$

Exercício 4. Se $a = 1+2i$, $b = 2-i$ e $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c} = 0$, determine o número complexo c.

Exercício 5. Determine, na forma algébrica, os números complexos z que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} z+2\overline{z} = 6-3i \\ 2z+3\overline{z} = 10-3i \end{cases}$$

Exercício 6. Determine a de modo que $z = \dfrac{1+2i}{2+ai}$ seja real.

Exercício 7. Se a e d são reais, encontre o valor de ad sabendo que

$$z = \frac{a+i}{1+di}$$

é um imaginário puro.

Exercício 8. Encontre a forma algébrica dos seguintes números complexos

(a) $\dfrac{1+i}{(1-i)^2}$.

(b) $\dfrac{i^{10}+i^8}{i^{10}-1}$.

(c) $\dfrac{(1+i)^2}{(2+i)}$.

Exercício 9. Encontre o valor de $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 10. Determine os números complexos z tais que

$$\frac{z}{1-i}+\frac{z}{1+i} = 1$$

Exercício 11. Se $x^2+y^2 = 1$, determine a forma algébrica do número complexo

$$\frac{1+x+iy}{1+x-iy}.$$

Exercício 12. Calcule

$$z = \frac{5+5i}{3-4i}+\frac{20}{4+3i}$$

Exercício 13. Calcule $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, em que n é um inteiro positivo.

Exercício 14. Encontre o valor de $-\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$

Exercício 15. Encontre o valor de $-\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$

Exercício 16. Determine o conjugado do número complexo $z = (1-i^{-1})^{-1}$

Exercício 17. A forma algébrica do número complexo $z = \dfrac{1+3i}{2-i}$ é:

a) $1/2-3i$ b) $5/3+7i/3$ c) $-1/5+7i/5$ d) $-1/5+7i$ e) $3/5+4i/5$

Exercício 18. Resolva a equação $|z|+z = 2+i$

Exercício 19. Calcule

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{8}.$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 20. Lembrando que $|z|^2 = z\cdot\overline{z}$, prove que se $|z_1| = |z_2| = 1$ e $z_1z_2 \neq -1$, então $w = \dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ é um número real.

Exercício 21. Seja $z \in \mathbb{C}$, com $|z| = 1$. Determine o valor da expressão $\left|\dfrac{1-\overline{z}w}{z-w}\right|$.

Exercício 22. Calcule $i^{100} + i^{80} + i^{30}$

Exercício 23. Resolva a equação $z^3 = 18 + 26i$, em que $z = x + yi$ com x e y inteiros.

Exercício 24. Seja a um número real positivo e considere

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C}^* : \left| z + \frac{1}{z} \right| = 1 \right\}$$

Encontre os valores mínimo e máximo de $|z|$ quando $z \in M$.

Exercício 25. Sejam p e q dois números complexos com $q \neq 0$. Prove que se as raízes da equação quadrática $x^2 + px + q = 0$ possuem o mesmo valor absoluto, então p/q é um número real.

Exercício 26. Encontre todos os números complexos z tais que $z^2 = \overline{z}$.

Exercício 27. O conjunto solução da equação

$$z^2 + (\overline{z})^2 = 0$$

é representado no plano complexo por:

a) duas retas perpendiculares.

b) uma elipse.

c) uma hipérbole.

d) duas retas.

Respostas e Soluções.

1.

(a)

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{3+2i}\cdot\frac{3-2i}{3-2i} \\ &= \frac{3-2i}{9-(2i)^2} \\ &= \frac{3-2i}{13} \\ &= 3/13 - 2i/13 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} \\ &= \frac{1-i}{1^2-i^2} \\ &= \frac{1-i}{2} \\ &= 1/2 - i/2 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} z &= \frac{8+6i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i} \\ &= \frac{(8+6i)(3-i)}{9-(i)^2} \\ &= \frac{30+10i}{10} \\ &= 3+i. \end{aligned}$$

2.

a) $\overline{z} = 3-2i$

b)

$$\begin{aligned} \overline{z} &= \overline{\frac{1}{1+i}} \\ &= \frac{1}{\overline{1+i}} \\ &= \frac{1}{1-i} \\ &= \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{1+i}{2} \\ &= 1/2 + i/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{z} &= \overline{(1+i)^2} \\ &= (\overline{1+i})^2 \\ &= (1-i)^2 \\ &= 1-2i+i^2 \\ &= -2i \end{aligned}$$

3.

a)

$$\begin{aligned} (1+i)\cdot\left(\frac{2+3i}{1+4i}\right) &= (1+i)\cdot\left(\frac{(2+3i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}\right) \\ &= (1+i)\cdot\frac{14-5i}{17} \\ &= \frac{19-9i}{17} \\ &= 19/17 - 9i/17 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{2+i}{1+i}+\frac{2+3i}{1+4i} &= \frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}+\frac{(2+3i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} \\ &= \frac{3-i}{2}+\frac{14-5i}{17} \\ &= \frac{51-17i+28-10i}{34} \\ &= 79/34 - 27i/34 \end{aligned}$$

4. Seja $c = x+iy$, então

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= -\frac{b}{c} \\ \frac{1+2i}{2-i} &= -\frac{2-i}{x+yi} \\ (1+2i)(x+yi) &= -(2-i)(2-i) \\ (x-2y)+(2x+y)i &= -5+4i \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} x-2y = -5 \\ 2x+y = 4 \end{cases}$$

A solução do sistema é $(x,y) = (3/5, 14/5)$ e assim $c = 3/5 + 14i/5$.

5. Multiplicando a segunda equação por 2 e subtraindo dela o triplo da primeira, obtemos

$$\begin{aligned} z &= 4z - 3z \\ &= 2(10-3i) - 3(6-3i) \\ &= 2+3i \end{aligned}$$

6. Para que z seja real, devemos ter $z = \overline{z}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1+2i}{2+ai} &= \frac{1-2i}{2-ai} \\ (1+2i)(2-ai) &= (1-2i)(2+ai) \\ (2+2a)+(4-a)i &= (2+2a)+(a-4)i. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} 2+2a = 2+2a \\ 4-a = a-4 \end{cases}$$

Analisando as duas equações, obtemos a solução $a = 4$.

Outra solução: Para que a fração seja real, o numerador deve ser um múltiplo real do denominador, ou seja, $1 + 2i = k(2 + ai)$, com $k \in \mathbb{R}$ Portanto,

$$\begin{cases} 1 = 2k \\ 2 = ak \end{cases}$$

Assim, $k = 1/2$ e $a = 2/k = 4$.

7. Como z é imaginário puro, $z = -\bar{z}$. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{a+i}{1+di} &= \frac{a-i}{1-di} \\ (a+i)(1-di) &= (a-i)(1+di) \\ (a+d)+(1-ad)i &= (a+d)+(ad-1)i \end{aligned}$$

Portanto $1 - ad = ad - 1$, ou seja, $2 = 2ad$ e $ad = 1$.

8.

(a)

$$\begin{aligned} \frac{1+i}{(1-i)^2} &= \frac{1+i}{-2i} \\ &= \frac{(1+i)i}{2} \\ &= \frac{-1+i}{2} \\ &= -1/2 + i/2. \end{aligned}$$

(b) Sabemos que $i^4 = 1$

$$\begin{aligned} \frac{i^{10}+i^8}{i^{10}-1} &= \frac{(i^4)^2(i^2)+(i^4)^2}{(i^4)^2 i^2} \\ &= \frac{-1+1}{-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \frac{(1+i)^2}{2+i} &= \frac{1+2i+i^2}{2+i} \\ &= \frac{2i}{2+i} \\ &= \frac{2i(2-i)}{(2+i)(2-i)} \\ &= \frac{2+4i}{5} \\ &= 2/5 + 4i/5. \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} &= \frac{(1+i)^9(1+i)^7}{(1-i)^7(1+i)^7} \\ &= \frac{(1+i)^{16}}{[(1+i)(1-i)]^7} \\ &= \frac{[(1+i)^2]^8}{2^7} \\ &= \frac{(2i)^8}{2^7} \\ &= 2i^8 \\ &= 2. \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} \frac{z}{1-i} + \frac{z}{1+i} &= 1 \\ z(1+i) + z(1-i) &= (1-i)(1+i) \\ 2z &= 2 \\ z &= 1. \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} \frac{1+x+iy}{1+x-iy} &= \frac{(1+x+iy)(1+x+iy)}{(1+x-iy)(1+x+iy)} \\ &= \frac{(1+x)^2+2(1+x)yi-y^2}{(1+x)^2+y^2} \\ &= \frac{(1+x)^2+2(1+x)yi-y^2}{(1+2x+x^2)+y^2} \\ &= \frac{(1+x)^2+2(1+x)yi-y^2}{2(1+x)} \\ &= \frac{(1+x)^2-y^2}{2(1+x)} + \frac{2(1+x)yi}{2(1+x)} \\ &= \frac{(1+x)^2-y^2}{2(1+x)} + yi. \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} \frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i} &= \frac{(5+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} + \frac{20(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} \\ &= \frac{-5+35i}{25} + \frac{80-60i}{25} \\ &= \frac{75-25i}{25} \\ &= 3 - i. \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned} \frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}} &= \frac{(1+i)^n(1+i)^{n-2}}{(1-i)^{n-2}(1+i)^{n-2}} \\ &= \frac{(1+i)^{2n-2}}{[(1+i)(1-i)]^{n-2}} \\ &= \frac{[(1+i)^2]^{n-1}}{2^{n-2}} \\ &= \frac{(2i)^{n-1}}{2^{n-2}} \\ &= 2i^{n-1}. \end{aligned}$$

14. Note que

$$\begin{aligned}(1-i)^4 &= [(1-i)^2]^2\\ &= [-2i]^2\\ &= -4\\ (1+i)^4 &= (\overline{1-i})^4\\ &= \overline{(1-i)^4}\\ &= -4.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}-\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1} &= -\frac{-4(1-i)-1}{-4(1+i)+1}\\ &= -\frac{-5+4i}{-3-4i}\\ &= -\frac{(-5+4i)(-3+4i)}{(-3-4i)(-3+4i)}\\ &= -\frac{-1-32i}{25}\\ &= 1/25+32/25.\end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned}-\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha} &= -\frac{\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha}\\ &= -\frac{(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)}{(\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha)(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)}\\ &= -\frac{\cos\alpha^2-\operatorname{sen}\alpha^2+2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha i}{\cos\alpha^2+\operatorname{sen}\alpha^2}\\ &= -\cos 2\alpha-\operatorname{sen}2\alpha i.\end{aligned}$$

16. Como $i^2=-1$, segue que $i^{-1}=-i$. Daí,

$$\begin{aligned}z &= (1-i^{-1})^{-1}\\ &= (1-(-i))^{-1}\\ &= \frac{1}{1+i}\\ &= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)}\\ &= \frac{1-i}{2}\\ &= 1/2-i/2.\end{aligned}$$

17.

$$\begin{aligned}z &= \frac{1+3i}{2-i}\\ &= \frac{(1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}\\ &= \frac{-1+7i}{5}\\ &= -1/5+7i/5.\end{aligned}$$

Resposta *C*.

18. Seja $z=x+yi$. A equação é equivalente a

$$\sqrt{x^2+y^2}+(x+yi)=2+i.$$

Analisando a parte real e imaginária de cada membro da equação, temos

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+x=2\\ \\ \qquad y=1\end{cases}$$

Substituindo o valor de y na primeira equação, temos $\sqrt{x^2+1}=2-x$, ou seja, $x^2+1=4-4x+x^2$. Assim, $4x=3$ e $x=3/4$. Logo, $z=3/4+i$. É fácil verificar que ele satisfaz a equação.

19. Note que

$$\begin{aligned}(1-i)^4 &= [(1-i)^2]^2\\ &= [-2i]^2\\ &= -4\\ (1+i)^4 &= (\overline{1-i})^4\\ &= \overline{(1-i)^4}\\ &= -4.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{8} &=\\ \frac{[(1+i)^4]^4}{[(1-i)^4]^4}+\frac{[(1-i)^4]^4}{[(1+i)^4]^4} &=\\ \frac{(-4)^4}{(-4)^4}+\frac{(-4)^4}{(-4)^4} &=\\ 1+1. &= 2.\end{aligned}$$

20. Devemos provar que $w=\overline{w}$. Basta que:

$$\begin{aligned}\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} &= \overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)}\\ &= \frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}.\end{aligned}$$

Como $|z_1|=|z_2|=1$, segue que $\overline{z_1}=1/z_1$ e $\overline{z_2}=1/z_2$. Daí,

$$\begin{aligned}\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}} &= \frac{1/z_1+1/z_2}{1+1/z_1\cdot 1/z_2}\\ &= \frac{\dfrac{z_1+z_2}{\cancel{z_1z_2}}}{\dfrac{z_1z_2+1}{\cancel{z_1z_2}}}\\ &= \frac{z_1+z_2}{z_1z_2+1}.\end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração.

21. Adaptado do ITA) Como $|z|=1$, seque que $\overline{z}=1/z$. Portanto

$$\begin{aligned}\frac{1-\overline{z}w}{z-w} &= \frac{1-\dfrac{w}{z}}{z-w}\\ &= \frac{z-w}{z-w}\cdot\frac{1}{z}\end{aligned}$$

Assim,

$$\left|\frac{1-\overline{z}w}{z-w}\right| = \frac{\cancel{|z-w|}}{\cancel{|z-w|}}\cdot\frac{1}{|z|}=1.$$

22. Lembrando que $i^4 = 1$, temos

$$\begin{aligned} i^{100} + i^{80} + i^{30} &= (i^4)^{25} + (i^4)^{20} + (i^4)^7 i^2 \\ &= 1^{25} + 1^{20} + 1^7 i^2 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

23. Pela expansão binomial, temos $(x+yi)^3 = x^3 + 3x^2(yi) + 3x(yi)^2 + (yi)^3$. Separando a parte real e imaginária, segue

$$\begin{aligned} x^3 - 3xy^2 &= 18 \\ 3x^2y - y^3 &= 26 \end{aligned}$$

A partir das equações anteriores, temos

$$18(3x^2y - y^3) = 26(x^3 - 3xy^2).$$

Seja $y/x = t$ e assim $18(3t - t^3) = 26(1 - 3t^2)$. Fatorando a expressão anterior, temos

$$(3t-1)(3t^2 - 12t - 13) = 0.$$

A única solução racional é $t = 1/3$. Substituindo $x = 3y$ nas equações anteriores, encontramos $x = 3$ e $y = 1$. Assim, $z = 3 + i$.

24. Elevando ambos os lados da igualdade $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} 1^2 &= \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 \\ &= \left(\overline{z} + \frac{1}{\overline{z}}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ &= |z|^2 + \frac{z^2 + \overline{z}^2}{|z|^2} + \frac{1}{|z|^2} \\ &= \frac{|z|^4 + (z+\overline{z})^2 - 2|z|^2 + 1}{|z|^2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |z|^4 - 3|z|^2 + 1 &= -(z+\overline{z})^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Consequentemente, $|z|^2 \in [\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}]$ Assim,

$$|z| \in [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$$

É fácil verificar que $z = \frac{(-1+\sqrt{5})i}{2}$ e $z = \frac{(1+\sqrt{5})i}{2}$ fazem parte de M e produzem os extremos do intervalo anterior para $|z|$. Daí, $max|z| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $min|z| = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

25. (Extraído da Olimpíada Romena) Sejam x_1 e x_2 são as raízes da equação e $r = |x_1| = |x_2|$. Então

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{q^2} &= \frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2} \\ &= \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 2 \\ &= \frac{x_1\overline{x_2}}{r^2} + \frac{x_2\overline{x_1}}{r^2} + 2 \\ &= 2 + \frac{2}{r^2}Re(x_1\overline{x_2}) \end{aligned}$$

é um número real. Além disso,

$$Re(x_1x_2) \geq -|x_1x_2| = -r^2.$$

Daí, $\frac{p^2}{q^2} \geq 0$ e assim, $\frac{p}{q}$ é um número real.

26. Seja $z = x + iy$. A equação é equivalente a

$$\begin{aligned} z^2 &= \overline{z} \\ (x+yi)^2 &= \overline{x+yi} \\ x^2 - y^2 + 2xyi &= x - yi. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ 2xy = -y \end{cases}$$

Se $y \neq 0$, temos $2x = -1$ e assim $y^2 = x^2 - x = -1/2$. As raízes são $x_1 = i\sqrt{3}/2$ e $x_2 = -i\sqrt{3}/2$. Nesse caso, temos duas soluções $z = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ e $z = -1/2 - i\sqrt{3}/2$. Se $y = 0$, $x^2 = x$ e as soluções são $x = 0$ e $x = 1$. As duas novas soluções são $z = 0$ e $z = 1$.

27. Se $z = x + iy$, então

$$\begin{aligned} z^2 + (\overline{z})^2 &= (x+yi)^2 + (x-yi)^2 \\ &= (x^2 + 2xyi - y^2) + (x^2 - 2xyi - y^2) \\ &= 2(x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Portanto $x^2 - y^2 = 0$. Daí,

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 \\ x &= \pm y \end{aligned}$$

As retas $y = x$ e $y = -x$ são as bissetrizes dos quadrantes do plano cartesiano e, consequentemente, sao ortogonais. Assim, a resposta é a alternativa A.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com