Números Complexos – Forma Geométrica

Adição e Subtração de números complexos no plano de Argand-Gauss

Material elaborado por Letícia Mattos.

Números Complexos – Forma Geométrica
Adição e Subtração de números complexos no plano de Argand-Gauss

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. No plano de Argand–Gauss, prove que a distância de $a + bi$ até a origem é igual a $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Exercício 2. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. No plano de Argand–Gauss, encontre a expressão que nos dá a distância entre os complexos $a + bi$ e $c + di$.

Exercício 3. Seja $x \in \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{R}$. Encontre o lugar geométrico dos pontos $z \in \mathbb{C}$ tais que $|z - x| = r$. Esboce-o no plano de Argand–Gauss.

Exercício 4. Determine o conjunto das imagens dos complexos z tais que

(a) $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$

(b) $1 \leq \text{Im}(z) \leq 4$

(c) $|z + i| + |z - i| = 4$

(d) $z + \dfrac{1}{z}$ é real

Interprete geometricamente os itens acima.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Prove que:

(a) $\text{Re}(z) \leq |z|$ e $\text{Im}(z) \leq |z|$

(b) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (desigualdade triangular)

(c) $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

Interprete geometricamente o item (b).

Exercício 6. Sob que condições se tem

(a) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$?

(b) $|z_1 + z_2| = ||z_1| - |z_2||$?

Exercício 7. Sejam z e w dois números complexos tais que $|z| = 3$ e $|w| = 4$. O que se pode afirmar sobre $|z + w|$?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 8. Sob que condições se tem $|z + w| = |z - w|$? Interprete geometricamente o resultado.

Exercício 9. Sejam z e w dois números complexos pertencentes à circunferência $C = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$ no plano de Argand–Gauss. Que condição z e w devem satisfazer para que tenhamos $z + w \in C$.

Exercício 10. Considere a funcção $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ dada por

$$f(z) = \frac{z + i}{-z + i}.$$

Prove que

(a) f é uma função bijetiva.

(b) $f(\mathbb{R}) \subseteq \{z : |z| = 1\}$.

Respostas e Soluções.

1. No plano de Argand–Gauss, $a+bi$ e 0 possuem coordenadas iguais a, respectivamente, (a,b) e $(0,0)$. Assim, a distância de $a+bi$ até a origem é dada por

$$\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

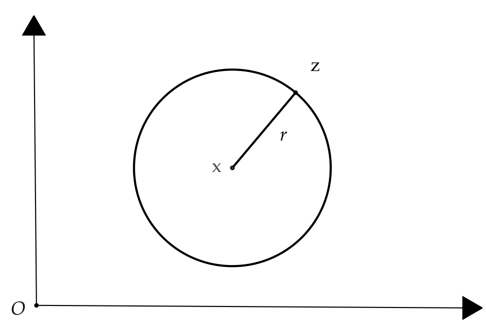
Relembre que $|a+bi|$ (lê-se módulo de $a+bi$) denota essa distância. Isto é, $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$.

2. No plano de Argand–Gauss, os números complexos $a+bi$ e $c+di$ estão associados, respectivamente, aos pontos (a,b) e (c,d). A distância entre os pontos (a,b) e (c,d) é dada por

$$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}.$$

Segue que a distância entre os números complexos $a+bi$ e $c+di$ é dada pela expressão acima.

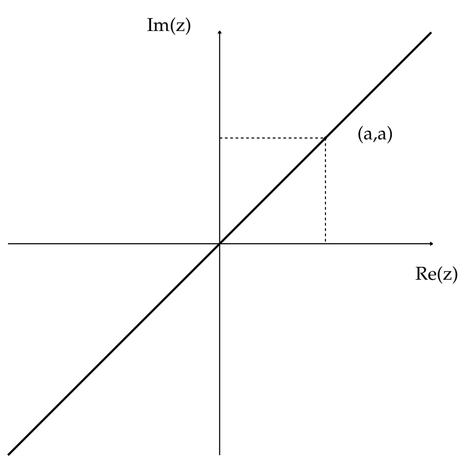
3. O conjunto dos pontos $z\in\mathbb{C}$ tais que $|z-x|=r$ formam uma circunferência de raio r centrada em x. A seguir, temos um esboço dessa circunferência:



4.

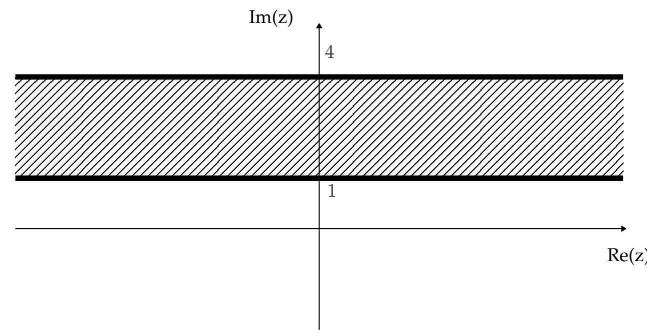
(a) Seja $z=a+bi$, em que $a,b\in\mathbb{R}$. Temos $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)$ se, e somente se, $a=b$. Isso nos define uma reta, que pode ser associada à reta de equalção $y=x$ no plano real.

A seguir, segue o esboço do lugar geométrico dos pontos $z\in\mathbb{C}$ tais que $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)$.



(b) Seja $z=a+bi$, em que $a,b\in\mathbb{R}$. Temos $1\le\mathrm{Im}(z)\le 4$ se, e somente se, $1\le b\le 4$. Isso nos dá uma faixa horizontal do plano, que pode ser associada à faixa $1\le y\le 4$ no plano real.

A seguir, segue o esboço do lugar geométrico dos pontos $z\in\mathbb{C}$ tais que $1\le\mathrm{Im}(z)\le 4$.



(c) Seja $z=x+yi$, em que $x,y\in\mathbb{R}$. Para cada $P,Q\in\mathbb{R}^2$, denote por $\mathrm{Dist}(P,Q)$ a distância entre os pontos P e Q no plano cartesiano. Por um lado,

$$\begin{aligned}|z+i| &= \sqrt{x^2+(y+1)^2} &(1)\\ &= \mathrm{Dist}\Big((x,y),(0,-1)\Big). &(2)\end{aligned}$$

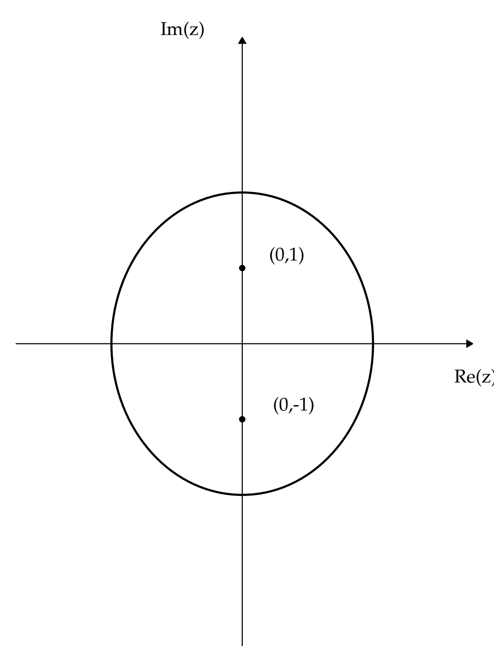
Por outro lado,

$$\begin{aligned}|z-i| &= \sqrt{x^2+(y-1)^2} &(3)\\ &= \mathrm{Dist}\Big((x,y),(0,1)\Big). &(4)\end{aligned}$$

Assim, os pontos que satisfazem a equação $|z+i|+|z-i|=4$ estão associados ao lugar geométrico dos pontos P's em $\mathbb{R}^2$ tais que

$$\mathrm{Dist}\Big(P,(0,1)\Big)+\mathrm{Dist}\Big(P,(0,-1)\Big)=4$$

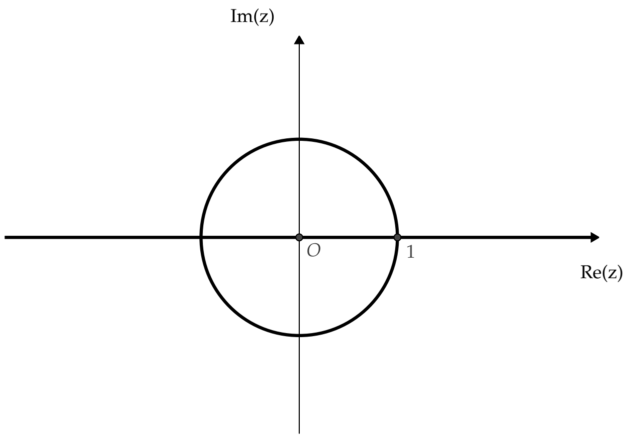
Isso nos dá uma elipse centrada na origem, com focos nos pontos $(0,1)$ e $(0,-1)$. A seguir, segue o esboço desse lugar geométrico.



(d) Seja $z = x + yi$, em que $x, y \in \mathbb{R}$. Lembre-se que um número complexo z é real se, e somente se, $z = \bar{z}$. Logo, $z + 1/z$ é real se, e somente se, $z + 1/z = \bar{z} + 1/\bar{z}$. Expressando essa igualdade em termos de x e y, segue que

$$\frac{1}{x+yi} - \frac{1}{x-yi} = -2yi \iff$$
$$\frac{-2yi}{(x+yi)(x-yi)} = -2yi \iff$$
$$\frac{y}{x^2+y^2} = y$$

Para que a última equação seja verdadeira, devemos ter ou $y = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1$. Concluímos que o lugar geométrico pedido é dado pela reta real ($y = 0$) e pela circunferência de raio 1 centrada na origem. A seguir, temos o esboço dessas estruturas:



5.

(a) Seja $z = a + bi$, em que $a, b \in \mathbb{R}$. Note que

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{a^2} \geq a.$$

Analogamente, temos

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{b^2} \geq b.$$

(b) Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Assim, a desigualdade $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ é equivalente a

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \qquad (5)$$

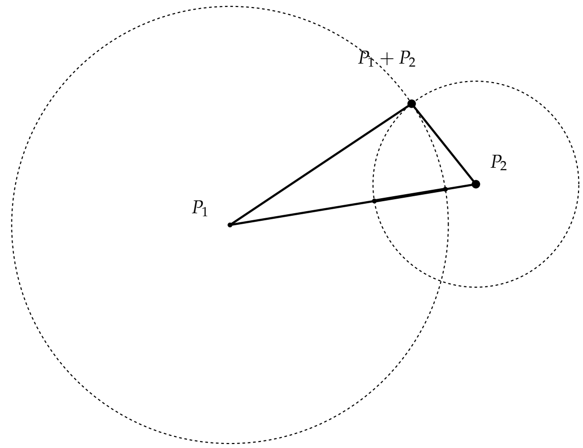
Por simplicidade, vamos adotar as seguintes notações:

$$\begin{cases} \bar{0} = (0,0) \\ P_1 = (a,b) \\ P_2 = (c,d) \end{cases}$$

Assim como no item (c) do Exercício 4, para quaisquer $P, Q \in \mathbb{R}^2$, seja $\text{Dist}(P,Q)$ a distância entre os pontos P e Q no plano cartesiano. Então, a desigualdade (5) é equivalente a

$$\text{Dist}(\bar{0}, P_1+P_2) \leq \text{Dist}(\bar{0}, P_1) + \text{Dist}(P_1, P_1+P_2)$$

Isso é equivalente à desigualdade triangular! No nosso caso, as medidas dos 3 lados do triângulo (possivelmente degenerado) a se considerar são $\text{Dist}(\bar{0}, P_1)$, $\text{Dist}(P_1, P_1+P_2)$ e $\text{Dist}(\bar{0}, P_1)$. Logo, a desigualdade $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ está provada uma vez que assumimos a desigualdade triangular. A seguir, esboçamos o triângulo de vértices P_1, P_2 e $P_1 + P_2$. Através do desenho abaixo, se convença de que a desigualdade triangular é verdadeira.



(c) Para este item, vamos usar o item anterior. Pela desigualdade triangular, temos

$$|z_1 + z_2| + |-z_1| \geq |z_2|.$$

Como $|-z_1| = |z_1|$, inferimos que

$$|z_1 + z_2| \geq |z_2| - |z_1| \qquad (6)$$

Trocando os papéis de z_1 e z_2, temos também a desigualdade

$$|z_2 + z_1| \geq |z_1| - |z_2| \qquad (7)$$

Juntas, as desigualdades (6) e (8) nos dão

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||, \qquad (8)$$

como queríamos.

6. Veja a solução do item (b) do Exercício 5. Vamos utilizar a mesma notação desse item.

(a) Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pelo item (b) do Exercício 5, a igualdade na desigualdade triangular ocorre se, e somente se

$$\text{Dist}(\bar{0}, P_1+P_2) = \text{Dist}(\bar{0}, P_1) + \text{Dist}(P_1, P_1+P_2),$$

em que $P_1 = (a,b)$ e $P_2 = (c,d)$. Observe também o esboço no item (b) do Exercício 5. Através desse esboço, podemos ver que a igualdade acima ocorre se, e somente se, os vetores correspondentes a z_1 e z_2 estão no mesmo sentido e na mesma direção. Ou seja, $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ se, e somente se, existe uma constante $C \geq 0$ tal que $z_2 = C \cdot z_1$.

(b) Primeiro, suponha que $|z_1 + z_2| = |z_1| - |z_2|$. Isso é equivalente a $|z_1 + z_2| + |-z_2| = |z_1|$ Pelo item anterior, essa igualdade é verdadeira se, e somente se, existe uma constante $A \geq 0$ tal que

$$z_1 + z_2 = A \cdot (-z_2).$$

Isso implica que existe uma constante $B \geq 1$ tal que $z_1 = B \cdot (-z_2)$. Analogamente, se $|z_1 + z_2| = |z_2| - |z_1|$, devemos ter uma constante $C \geq 1$ tal que $z_2 = C \cdot (-z_1)$.

Em todo caso, existe uma constante $D \geq 0$ tal que $z_1 = D \cdot (-z_2)$.

7. Pelas desigualdades (b) e (c) do Exercício 5, podemos apenas afirmar que

$$||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|.$$

E isso nos dá

$$1 \leq |z + w| \leq 7.$$

8. Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$, em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. A igualdade $|z + w| = |z - w|$ é equivalente a

$$(a + c)^2 + (b + d)^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2 \iff ac + bd = 0 \qquad (9)$$

Antes de analisar a igualdade acima, seja r a reta que passa pela origem e pelo ponto (a, b) e s a reta que passa pela origem e pelo ponto (c, d) em $\mathbb{R}^2$. Observe que as equações que definem as retas r e s são dadas por

$$r : y = \frac{b}{a}x \qquad \text{e} \qquad s : y = \frac{d}{c}x$$

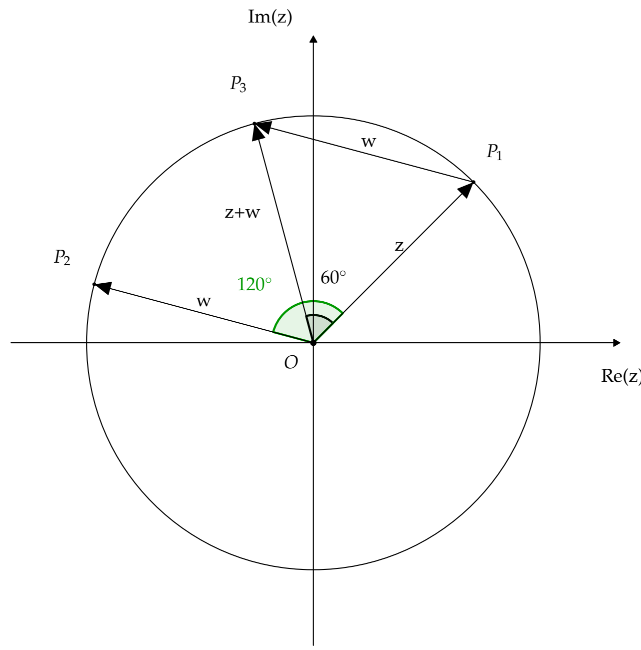
Um teorema de matemática em geometria analítica nos diz que r e s são perpendiculares se, e somente se a multiplicação dos seus coeficientes lineares é igual a -1. Ou seja, $(b/a) \cdot (d/c) = -1$. Isso é equivalente ao que temos em (9).

Concluímos que $|z + w| = |z - w|$ se, e somente se, as retas r e s são perpendiculares. Na linguagem de vetores, temos que $|z + w| = |z - w|$ se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{z}$ e $\overrightarrow{w}$ são perpendiculares.

9. Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$, em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Considere os pontos $P_1 = (a, b)$, $P_2 = (c, d)$ e $P_3 = (a + c, b + d)$ no plano cartesiano. Note que

$$|z + w| = |w| = |z| = 1 \iff \Delta OP_1P_3 \text{é um triângulo equilátero de lado 1.}$$

Como $|OP_1| = |P_1P_3| = |OP_2|$, ΔOP_1P_3 será um triângulo equilátero só se $\angle OP_1P_3 = 60°$. Mas, para que $\angle OP_1P_3 = 60°$, devemos ter $\angle P_1OP_2 = 120°$. Disso, segue que $z + w$ pertence à circunferência de raio 1 se, e somente se, o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{z}$ e $\overrightarrow{w}$ é igual a 120°.



10.

(a) Primeiro, vamos provar que f é injetiva. Sejam $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Então,

$$\begin{aligned} f(z) = f(w) &\iff \frac{z+i}{-z+i} = \frac{w+i}{-w+i} \\ &\iff -zw + (z-w)i - 1 = -zw + (w-z)i - 1 \\ &\iff z - w = w - z \\ &\iff z = w. \end{aligned}$$

Isso prova que f é injetiva. Agora, vamos provar que f é sobrejetiva. Temos

$$\begin{aligned} f(z) = w &\iff \frac{z+i}{-z+i} = w \\ &\iff z + i = -zw + iw \\ &\iff (1+w)z = (w-1)i \\ &\iff z = \frac{w-1}{w+1}. \end{aligned}$$

Como $w \neq -1$, segue que f é sobrejetiva. Concluímos que f é bijetiva.

(b) Seja $r \in \mathbb{R}$. Observe que $|r + i| = |-r + i| = \sqrt{r^2 + 1}$. Assim, segue que

$$\left|\frac{r+i}{-r+i}\right| = \frac{|r+i|}{|-r+i|} = 1.$$

Assim, segue que $|f(r)| = 1$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Isso nos dá

$$f(\mathbb{R}) \subseteq \{z : |z| = 1\},$$

como queríamos.

Material elaborado por Letícia Mattos.