Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos

Dispositivo de Briot-Ruffini

3° ano E.M.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos
Dispositivo de Briot-Ruffini

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Qual a soma dos coeficientes do quociente da divisão de $P(x) = x^2 + 3x + 1$ por $D(x) = x - 1$?

a) -5.

b) -1.

c) 0.

d) 1.

e) 5.

Exercício 2. Fazendo a divisão de $x^3 + x^2 + x + 1$ por $x - 3$ obtemos quociente igual a:

a) $x^2 - 4x - 13$.

b) $x^2 + 4x - 13$.

c) $x^2 - 4x + 13$.

d) $x^2 + 4x + 13$.

e) $-x^2 + 4x - 13$.

Exercício 3. Qual o valor de m para que $p(x) = 2x^3 - 3x + m$ seja divisível por $d(x) = x - 3$?

a) -45.

b) -40.

c) -35.

d) -30.

e) -25.

Exercício 4. A divisão de $p(x) = x^4 - 2x^3 + kx^2 + 4$ por $d(x) = x - 2$ resulta em quociente igual a $q(x) = x^3 + 3x + 6$ e resto igual a m. O valor de $k + m$ é igual a:

a) 15.

b) 16.

c) 17.

d) 18.

e) 19.

Exercício 5. Sabendo que $A(x) = ax^2 - ax + b$ é divisível por $B(x) = x + 1$, então o quociente e o resto desta divisão são, respectivamente:

a) $ax - 2a$ e $2a + b$.

b) $2ax - 2a$ e $a + b$.

c) $ax + 2a$ e $2a - b$.

d) $ax - a$ e $2a + 2b$.

e) $2ax - 2a$ e $-a + b$.

Exercício 6. Sejam $p(x) = x^4 + 3x^2 + k$ e $d(x) = x^2 - 1$. Se $p(x)$ é divisível por $d(x)$, então k vale:

a) -1.

b) -2.

c) -3.

d) -4.

e) -5.

Exercício 7. Qual o quociente na divisão de $P(x) = 4x^3 + ix^2 + ix + 1$ por $D(x) = x - i$?

a) $4x^2 - 5ix - 5 + i$.

b) $4x^2 + 5ix + 5 + i$.

c) $4x^2 + 5ix - 5 + i$.

d) $-4x^2 + 5ix - 5 + i$.

e) $4x^2 - 5ix - 5 - i$.

Exercício 8. Se o resto da divisão de $P(x) = x^5 + ix^4 - ax + a$ por $D(x) = x - 2$ é 3, qual a soma dos coeficientes do quociente desta divisão?

a) $1 - i$.

b) $2 - i$.

c) $3 - i$.

d) $4 - i$.

e) $5 - i$.

2 Exercícios de Fixação

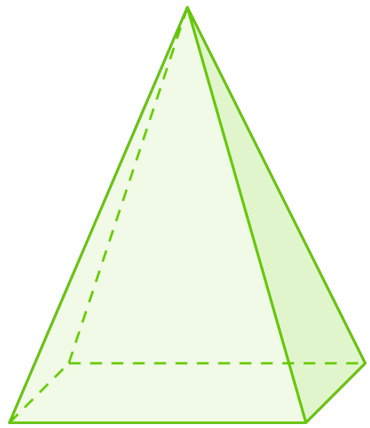
Exercício 9. Determine o valor de a para que $p(x) = 4x^3 + (a-1)x^2 - x + a$ seja divisível por $q(x) = 2x - 1$.

Exercício 10. Calcule o quociente e o resto da divisão de $p(x) = 4x^3 - x^2 - x + 1$ por $d(x) = 2x - 3$.

Exercício 11. Determine os valores de a e b, sabendo que $p(x) = x^4 + ax^3 - 7x^2 + ax + b$ é divisível por $x^2 - 1$.

Exercício 12. Determine o resto da divisão de $p(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5$ por $d(x) = x^2 - 3x + 2$.

Exercício 13. Na figura, temos uma pirâmide quadrangular regular, cuja altura mede $3x - 3$. Determine a medida da aresta da base, sendo o seu volume $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$.



Exercício 14. Dividindo-se o polinômio $p(x) = 5ix^3 - (i + 3)x^2 + (-1 + i)x + k$ por $h(x) = x - 1$, obtém-se resto $r(x) = 2i$. Determine o quociente.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Determine o resto da divisão de $x^{100} + x + 1$ por $x^2 - 1$.

Exercício 16. Um polinômio $P(x)$ é tal que $P(1) = 4$. O quociente da divisão de $P(x)$ por $(x - 1)$ é dividido por $(x - 2)$ e obtém-se resto 3. Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 1)(x - 2)$.

Exercício 17. Considere os polinômios $P(x) = x^2 - 3x + 2$ e $M(x) = x^3 - 8$. O quociente do mínimo múltiplo comum pelo máximo divisor comum desses polinômios é:

a) $x - 1$.

b) $x - 2$.

c) $(x - 1)(x - 2)$.

d) $(x - 1)(x^2 + 2x + 4)$.

e) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

Exercício 18. Seja $P(x)$ um polinômio divisível por $x - 1$. Dividindo-o por $x^2 + x$, obtém-se o quociente $Q(x) = x^2 - 3$ e o resto $R(x)$. Se $R(4) = 10$, então o coeficiente do termo de grau 1 de $P(x)$ é igual a:

a) -5.

b) -3.

c) -1.

d) 1.

e) 3.

Exercício 19. A divisão de um polinômio $P(x)$ por $x^2 - x$ resulta no quociente $6x^2 + 5x + 3$ e resto $-7x$. O resto da divisão de $P(x)$ por $2x + 1$ é igual a:

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Exercício 20. Seja p o polinômio dado por

$$p(x) = \sum_{j=0}^{15} a_j x^j,$$

com $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, ..., 15$ e $a_{15} \neq 0$. Sabendo-se que i é uma raiz de p e que $p(2) = 1$, então o resto da divisão de p pelo polinômio q, dado por $q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, é igual a:

a) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}$.

b) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

c) $\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}$.

d) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{5}$.

e) $\frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1. Usando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 \\ \hline & 1 & 4 & \boxed{5} \end{array}$$

Chegamos, assim, ao quociente $x+4$, cuja soma dos coeficientes é $1+4=5$. Resposta E.

2. Fazendo a divisão pelo dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 4 & 13 & \boxed{40} \end{array}$$

Chegamos, portanto, ao quociente $x^2+4x+13$. Resposta D.

3. Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 2 & 0 & -3 & m \\ \hline & 2 & 6 & 15 & \boxed{45+m} \end{array}$$

Como $p(x)$ é divisível por $q(x)$, o resto deve ser zero, ou seja, $45+m=0$, segue que $m=-45$. Resposta A.

4. Vamos construir o dispositivo de divisão de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & 1 & -2 & k & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & k & 2k & \boxed{4k+4} \end{array}$$

Encontramos quociente $x^3+kx+2k$ e resto $4k+4$, temos então que $k=3$ e $m=4k+4=16$. Portanto, $k+m=19$. Resposta E.

5. Usando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{c|ccc} -1 & a & -a & b \\ \hline & a & -2a & \boxed{2a+b} \end{array}$$

Chegamos, portanto, ao quociente $ax-2a$ e resto $2a+b$. Resposta A.

6. Se $p(x)$ é divisível pro $d(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$, então $p(x)$ é divisível por $x+1$ e $x-1$. Podemos dividir $p(x)$ por qualquer um dos fatores. Vamos dividi-lo por $x-1$:

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & k \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 4 & \boxed{4+k} \end{array}$$

Como o resto é $4+k=0$, temos $k=-4$. Resposta D.

7. Usando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{c|cccc} i & 4 & i & i & 1 \\ \hline & 4 & 5i & -5+i & \boxed{-5i} \end{array}$$

Portanto, o quociente é $4x^2+5ix-5+i$. Resposta C.

8. Fazendo a divisão, temos:

$$\begin{array}{c|cccccc} 2 & 1 & i & 0 & 0 & -a & a \\ \hline & 1 & 2+i & 4+2i & 8+4i & 16-a+8i & \boxed{32-a+16i} \end{array}$$

Como a divisão de $P(x)$ por $D(x)$ deixa resto 3, temos $32-a+16i=3$, segue que $a=29+16i$. Portanto, o quociente da divisão é $x^4+(2+i)x^3+(4+2i)x^2+(8+4i)x+(-13-8i)$. Portanto, a soma dos coeficientes do quociente é $1+(2+i)+(4+2i)+(8+4i)+(-13-8i)=2-i$. Resposta B.

9. Usando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 4 & a-1 & -1 & a \\ \hline & 4 & a+1 & \frac{3a-1}{2} & \boxed{\frac{7a-1}{4}} \end{array}$$

Como o resto deve ser zero, ou seja, $\dfrac{7a-1}{4}=0$, então $a=\dfrac{1}{7}$.

10. Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{3}{2} & 4 & -1 & -1 & 1 \\ \hline & 4 & 5 & \frac{13}{2} & \boxed{\frac{43}{4}} \end{array}$$

Portanto, o quociente é $4x^2+5x+\dfrac{13}{2}$ e o resto $\dfrac{43}{4}$.

11. Se $p(x)$ é divisível por $x^2-1=(x+1)(x-1)$, então $p(x)$ é divisível por $x+1$ e $x-1$. Temos, dividindo por $x+1$:

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & 1 & a & -7 & a & b \\ \hline & 1 & a-1 & -a-6 & 2a+6 & \boxed{-2a+b-6} \end{array}$$

Agora, dividindo por $x-1$:

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & a & -7 & a & b \\ \hline & 1 & a+1 & a-6 & 2a-6 & \boxed{2a+b-6} \end{array}$$

Como os dois restos devem ser iguais a zero, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} -2a+b-6 = 0 \\ 2a+b-6 = 0. \end{cases}$$

Somando as equações, chegamos a $b=6$ e $a=0$.

12. Como o divisor tem grau 2, então o resto deve ter grau menor que 2 ou não ter grau, sendo que em qualquer caso podemos representá-lo por $R(x) = ax + b$. Sendo assim, vamos dividir $p(x)$ por $(x-1)$ e $(x-2)$, pois $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$:

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 5 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & \boxed{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 5 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{7} \end{array}$$

Temos então que $R(1) = 5$ e $R(2) = 7$, ou seja:

$$\begin{cases} a + b & = & 5 \\ 2a + b & = & 7. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, chegamos a $a = 2$ e $b = 3$. Portanto, o resto da divisão de $p(x)$ por $d(x)$ é $R(x) = 2x + 3$.

13. Como o volume V da pirâmide pode ser calculado como $V = \dfrac{A_b \cdot h}{3}$, sendo A_b a área da base e h a altura da pirâmide, podemos obter a área da base fazendo $A_b = \dfrac{3V}{h} = \dfrac{3V}{3(x-1)} = \dfrac{V}{x-1}$, ou seja:

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -5 & 8 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

Encontramos, pela divisão polinomial, que a área da base é representada pela expressão polinomial $x^2 - 4x + 4$, que é igual a $(x-2)^2$. Como a base da pirâmide é quadrada, a medida do lado é $x - 2$.

14. Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 5i & -(i+3) & (-1+i) & k \\ \hline & 5i & 4i-3 & 5i-4 & \boxed{5i-4+k} \end{array}$$

Temos, portanto, que o quociente da divisão é $5ix^2 + (-3 + 4i)x + (-4 + 5i)$.

15. (Extraído da Unicamp - SP - adaptado) Como $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, vamos dividir $x^{100} + x + 1$ por $x + 1$ e $x - 1$:

$$\begin{array}{c|cccccccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & ... & 1 & 0 & \boxed{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 2 & \boxed{3} \end{array}$$

Encontramos $R(-1) = 1$ e $R(1) = 3$. Como o divisor tem grau 2, então o resto tem grau menor que 2, ou seja, $R(x) = ax + b$. Assim:

$$\begin{cases} -a + b & = & 1 \\ a + b & = & 3. \end{cases}$$

Somando as equações, encontramos $b = 2$ e $a = 1$, segue que $R(x) = x + 2$.

16. (Extraído da UFMG) Se $P(1) = 4$, então o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-1)$ é 4. Sendo assim, vamos fazer duas divisões sucessivas, por $(x-1)$, depois por $(x-2)$, obtendo, respectivamente, quociente q_1 e resto 4 e quociente q_2 e resto 3. Temos então:

$$\begin{cases} P(x) & = & (x-1)q_1 + 4 \\ q_1 & = & (x-2)q_2 + 3. \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, temos:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)q_1 + 4 \\ &= (x-1)((x-2)q_2 + 3) + 4 \\ &= (x-1)(x-2)q_2 + 3(x-1) + 4 \\ &= (x-1)(x-2)q_2 + 3x + 1. \end{aligned}$$

Portanto, na divisão de $P(x)$ por $(x-1)(x-2)$ encontramos resto $3x + 1$.

17. (Extraído da UFMG) Como as raízes de $P(x)$ são 1 e 2, temos $P(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. No caso de $M(x)$, por inspeção, temos 2 como raiz. Vamos usar esta raiz para decompor $M(x)$:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & -8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

Com isso, obtemos $M(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$, cujo segundo fator possui raízes imaginárias. Dessa forma, temos que o mmc entre P e M é $(x-1)(x-2)(x^2 + 2x + 4)$ e o MDC é $(x-2)$. Dividindo mmc pelo MDC encontramos $(x-1)(x^2 + 2x + 4)$. Resposta D.

18. (Extraído do ITA) Como o divisor é de grau 2, então podemos escrever o resto como $R(x) = ax + b$. Temos ainda que $P(x) = (x^2 + x)(x^2 - 3) + R(x)$. Como $P(1) = 0$, pois P é divisível por $x - 1$, e $R(4) = 10$, chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} (1^2 + 1)(1^2 - 3) + a + b & = & 0 \\ 4a + b & = & 10. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b &= 4 \\ 4a+b &= 10. \end{cases}$$

Subtraindo as equações, obtemos $a = 2$ e $b = 2$. Portanto, $P(x) = (x^2+x)(x^2-3)+2x+2 = x^4+x^3-3x^2-x+2$. Por fim, temos que o coeficiente do termo de grau 1 é -1. Resposta C.

19. (Extraído do ITA) Inicialmente, vamos encontrar $P(x)$: $P(x) = (x^2-x)(6x^2+5x+3)-7x = 6x^4-x^3-2x^2-10x$. Usando o dispositivo de Briot-Ruffini na divisão de $P(x)$ por $2x+1$, temos:

$$\begin{array}{c|ccccc} -\frac{1}{2} & 6 & -1 & -2 & -10 & 0 \\ \hline & 6 & -4 & 0 & -10 & \boxed{5} \end{array}$$

Portanto, o resto da divisão é 5. Resposta E.

20. (Extraído do ITA - 2015) Como $q(x)$ tem grau 3, o resto da divisão tem grau menor que 3, ou seja, $R(x) = ax^2+bx+c$. Temos que $q(x) = x^2(x-2)+(x-2) = (x-2)(x^2+1)$. Se $A(x)$ é o quociente da divisão de $p(x)$ por $q(x)$, obtemos $p(x) = (x^2+1)(x-2)A(x)+ax^2+bx+c$. Usando $p(2) = 1$ e $p(i) = 0$, pois i é raiz, temos:

$$\begin{cases} (2^2+1)(2-2)A(2)+4a+2b+c &= 1 \\ (i^2+1)(i-2)A(i)-a-bi+c &= 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a+2b+c &= 1 \\ -a-bi+c &= 0. \end{cases}$$

Da segunda equação, chegamos a $a = c$ e $b = 0$ e, substituindo na primeira, obtemos $a = \frac{1}{5}$. Portanto, $p(x) = \frac{x^2}{5}+\frac{1}{5}$. Resposta B.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com