

Módulo de Trigonometria

Seno, Cosseno e Tangente

1ª série E.M.



Trigonometria
Senos, Cossenos e Tangentes.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine

- a) $\text{sen } 120^\circ$.
- b) $\text{sen } 180^\circ$.
- c) $\text{sen } 240^\circ$.
- d) $\text{sen } 315^\circ$.
- e) $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.
- f) $\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.
- g) $\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

Exercício 2. Determine

- a) $\cos 90^\circ$.
- b) $\cos 135^\circ$.
- c) $\cos 240^\circ$.
- d) $\cos 330^\circ$.
- e) $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.
- f) $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.
- g) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Exercício 3. Determine

- a) $\text{tg } 120^\circ$.
- b) $\text{tg } 225^\circ$.
- c) $\text{tg } 240^\circ$.
- d) $\text{tg } 300^\circ$.
- e) $\text{tg}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.
- f) $\text{tg}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.
- g) $\text{tg}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

Exercício 4. Determine

- a) $\text{sen } 720^\circ$.
- b) $\cos 1170^\circ$.

- c) $\text{tg } 3540^\circ$.
- d) $\text{sen } 3930^\circ$.
- e) $\cos(-2115)^\circ$.
- f) $\text{tg}(-840)^\circ$.
- g) $\text{sen}(-540)^\circ$.
- h) $\text{sen}\left(\frac{51\pi}{4}\right)$.
- i) $\cos\left(\frac{37\pi}{6}\right)$.
- j) $\text{tg}\left(\frac{29\pi}{3}\right)$.
- k) $\text{sen}\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Qual a menor determinação de α no segundo quadrante, tal que $\text{sen } \alpha = 1/2$?

Exercício 6. Determine α , sendo $\cos \alpha = 0$.

Exercício 7. Determine α , sendo $\text{tg } \alpha = 1$.

Exercício 8. Determine α , no segundo quadrante, tal que $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercício 9. Sabendo que $180^\circ < \beta < 270^\circ$ e $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, determine β .

Exercício 10. Sabendo que α é um arco do primeiro quadrante, quais são os valores de m que satisfazem a igualdade $\text{sen } \alpha = 2m - 7$?

Exercício 11. A expressão $\frac{\text{sen } 75^\circ \cdot \cos 327^\circ \cdot \text{tg } 138^\circ}{\text{sen } 269^\circ \cdot \text{tg } 288^\circ}$ é positiva, negativa ou zero?

Exercício 12. Para que valores de α , $0 \leq \text{tg } \alpha \leq 1$?

Exercício 13. Determine os possíveis valores reais de k , sabendo que $\cos \beta = 2k + 3$.

Exercício 14. Se α é um arco do terceiro quadrante, determine se $E = \frac{\text{tg}(180^\circ + \alpha) \cdot \text{sen}(270^\circ - \alpha)}{\cos(\alpha - 90^\circ)}$ é positivo, negativo ou zero.

Exercício 15. Determine o número de soluções da equação $\text{sen } \alpha = 2/3$ no intervalo $[0, 9\pi]$.

Exercício 16. Determine as raízes da equação $2^{\text{sen } x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 17. As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de $114m$ (altura indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.



Figura 1

Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço

- a) menor que $100m^2$.
- b) entre $100m^2$ e $300m^2$.
- c) entre $300m^2$ e $500m^2$.
- d) entre $500m^2$ e $700m^2$.
- e) maior que $700m^2$.

Exercício 18. A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $P(t) = 10^3(\cos(\frac{t-2}{6}\pi) + 5)$ em que o tempo t é medido em meses. É correto afirmar que

- a) o período chuvoso corresponde a dois trimestres do ano.
- b) a população atinge seu máximo em $t = 6$.
- c) o período de seca corresponde a 4 meses do ano.
- d) a população média anual é de 6000 animais.

e) a população atinge seu mínimo em $t = 4$ com 6000 animais.

Exercício 19. O valor de $(\cos 165^\circ + \sin 155^\circ + \cos 145^\circ - \sin 25^\circ + \cos 35^\circ + \cos 15^\circ)$ é

- a) $\sqrt{2}$.
- b) -1 .
- c) 0.
- d) 1.
- e) $1/2$.

Exercício 20. O número real m que satisfaz à sentença $\frac{m+1}{m-2} = \cos 3015^\circ$ é

- a) $4 - 3\sqrt{2}$.
- b) $3\sqrt{2} - 4$.
- c) $3 - 4\sqrt{2}$.
- d) $4\sqrt{2} + 3$.
- e) $3\sqrt{2} + 4$.

Respostas e Soluções.

1.

a) $\text{sen } 120^\circ = \text{sen } 60^\circ = \sqrt{3}/2.$

b) $\text{sen } 180^\circ = 0.$

c) $\text{sen } 240^\circ = -\text{sen } 60^\circ = -\sqrt{3}/2.$

d) $\text{sen } 315^\circ = -\text{sen } 45^\circ = -\sqrt{2}/2.$

e) $\text{sen } \frac{3\pi}{4} = \text{sen } \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}/2.$

f) $\text{sen } \frac{7\pi}{6} = -\text{sen } \frac{\pi}{6} = -1/2.$

g) $\text{sen } \frac{5\pi}{3} = -\text{sen } \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}/2.$

2.

a) $\cos 90^\circ = 0.$

b) $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -1.$

c) $\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -1/2.$

d) $\cos 330^\circ = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2.$

e) $\cos(5\pi/4) = -\cos(\pi/4) = -\sqrt{2}/2.$

f) $\cos(11\pi/6) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2.$

g) $\cos(2\pi/3) = -\cos(\pi/3) = -1/2.$

3.

a) $\text{tg } 120^\circ = -\text{tg } 60^\circ = -\sqrt{3}.$

b) $\text{tg } 225^\circ = \text{tg } 45^\circ = 1.$

c) $\text{tg } 240^\circ = \text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}.$

d) $\text{tg } 300^\circ = -\text{tg } 60^\circ = -\sqrt{3}.$

e) $\text{tg}(7\pi/4) = -\text{tg}(\pi/4) = -1.$

f) $\text{tg}(5\pi/6) = -\text{tg}(\pi/6) = -\sqrt{3}/3.$

g) $\text{tg}(4\pi/3) = \text{tg}(\pi/3) = \sqrt{3}.$

4.

a) $\text{sen } 720^\circ = \text{sen } 0^\circ = 0.$

b) $\cos 1170^\circ = \cos 90^\circ = 0.$

c) $\text{tg } 3540^\circ = \text{tg } 300^\circ = -\text{tg } 60^\circ = -\sqrt{3}.$

d) $\text{sen } 3930^\circ = \text{sen } 330^\circ = -\text{sen } 30^\circ = -1/2.$

e) $\cos(-2115^\circ) = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2.$

f) $\text{tg}(-840^\circ) = \text{tg } 240^\circ = \text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}.$

g) $\text{sen}(-540^\circ) = \text{sen } 180^\circ = 0.$

h) $\text{sen}(51\pi/4) = \text{sen}(3\pi/4) = \text{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2.$

i) $\cos(37\pi/6) = \cos(\pi/6) = 1/2.$

j) $\text{tg}(29\pi/3) = \text{tg}(5\pi/3) = -\text{tg}(\pi/3) = -\sqrt{3}.$

k) $\text{sen}(-11\pi/3) = \text{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2.$

5. Se α fosse do primeiro quadrante, então α seria 30° , mas como pertence ao segundo quadrante, $\alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

6. $\cos \alpha = 0$ nas extremidades superior e inferior do círculo trigonométrico. Assim, temos $\alpha = \{90^\circ, 270^\circ, 450^\circ, \dots\}$, ou seja, $\alpha = 90^\circ + 180^\circ k$, onde $k \in \mathbb{Z}$, ou ainda, $\alpha = \pi/2 + k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

7.

Se $\text{tg } \alpha = 1$, então $\alpha = \pi/4 + k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

8. $\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$

9. $\beta = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ.$

10. Como $\alpha \in$ ao primeiro quadrante, então $0 < \text{sen } \alpha < 1$. Assim, temos $0 < 2m - 7 < 1$, segue que $7/2 < m < 4$.

11.
$$\frac{\text{sen } 75^\circ \cdot \cos 327^\circ \cdot \text{tg } 138^\circ}{\text{sen } 269^\circ \cdot \text{tg } 288^\circ} = \frac{(+)\cdot(+)\cdot(-)}{(-)\cdot(-)} < 0,$$
 portanto a expressão é negativa.

12. No primeiro quadrante (menor determinação positiva do arco), temos $0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$. No terceiro quadrante (e menor determinação positiva do arco), temos $180^\circ \leq \alpha \leq 225^\circ$. Generalizando, chegamos a $180^\circ k \leq \alpha \leq 45^\circ + 180^\circ k$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

13. Sabemos que $-1 \leq \cos \beta \leq 1$. Assim, temos $-1 \leq 2k + 3 \leq 1$, segue que $-2 \leq k \leq -1$.

14. Como α é um arco do terceiro quadrante, então $\text{tg}(180^\circ + \alpha) > 0$, $\text{sen}(270^\circ - \alpha) > 0$ e $\cos(\alpha - 90^\circ) < 0$. Dessa forma, $E = (+)(+)/(-) < 0$, ou seja, E é negativo.

15. Como $0 < \text{sen } \alpha < 1$, α é um arco do primeiro ou segundo quadrantes. No intervalo $[0, 9\pi]$, que equivale a quatro voltas e meia no círculo trigonométrico, passaremos cinco vezes por cada um destes quadrantes, ou seja, são 10 soluções.

16.

$$2^{\text{sen } x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2^{\text{sen } x} = 2^{-1/2}$$

$$\text{sen } x = -1/2$$

$$x = 210^\circ + k360^\circ, \text{ ou}$$

$$x = 330^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

17. (ENEM 2013) Chamando de ℓ o lado da base quadrada do prédio, temos $\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\ell}{114}$, segue $\ell = 29,64m$. Portanto a área é $(29,64)^2 = 858,73m^2$. Resposta E.

18. (EsPCEEx 2014) Resposta A. Tomando um intervalo de 12 meses, por exemplo, $2 < t < 14$, teremos uma volta completa no círculo trigonométrico. Isso significa que metade do tempo, dois trimestres, $\cos\left(\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right)$ aumenta ($2 < t < 5$ e $11 < t < 14$) e, conseqüentemente, o período é de chuva.

19. (EsPCEEx 2014) Como a expressão é equivalente a $(-\cos 15^\circ + \operatorname{sen} 25^\circ - \cos 35^\circ - \operatorname{sen} 25^\circ + \cos 35^\circ + \cos 15^\circ)$, seu valor é 0. Resposta C.

20. $\frac{m+1}{m-2} = \cos 3015^\circ = \cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\sqrt{2}/2$.

Assim, temos $2(m+1) = -\sqrt{2}(m-2)$, segue que $m = \frac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}+2} = 3\sqrt{2}-4$. Resposta B.