Inequações Produto e Quociente de Primeiro Grau

Inequações Quociente

1° ano E.M.

Inequações Produto e Quociente de Primeiro Grau
Inequações Quociente

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $\dfrac{x+2}{2x-1} > 0$.

Exercício 2. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $\dfrac{x-1}{x-2} < 0$.

Exercício 3. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $\dfrac{x-1}{3-x} < 0$.

Exercício 4. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $\dfrac{(x-3)^3}{(x-5)^5} < 0$.

Exercício 5. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação

$$\frac{x}{x+1} < 1.$$

Exercício 6. O conjunto solução de $\dfrac{x-1}{x-6} > 0$ em $U = \mathbb{R}$ é da forma $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$. Determine o valor de $a \cdot b$.

Exercício 7. O conjunto solução de $\dfrac{x-4}{x-7} > 0$ em $U = \mathbb{R}$ é da forma $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$. Determine o valor de $a \cdot b$.

Exercício 8. Determine o conjunto solução de $\dfrac{x-2}{x-8} > 0$ em $U = \mathbb{R}$.

Exercício 9. Determine o conjunto solução de $\dfrac{x-1}{x-6} < 0$ em $U = \mathbb{R}$.

Exercício 10. Determine o conjunto solução de $\dfrac{x-4}{x-7} < 0$ em $U = \mathbb{R}$.

Exercício 11. O conjunto solução de $\dfrac{1}{x-1} > 1$ em $U = \mathbb{R}$ é da forma (a, b). Determine o valor de $a \cdot b$.

Exercício 12. Determine o conjunto solução de $\dfrac{1}{x-14} > 1$ em $U = \mathbb{R}$.

Exercício 13. O conjunto solução de $\dfrac{x}{x-1} > 1$ em $U = \mathbb{R}$ é da forma $(a, +\infty)$. Determine o valor de a.

Exercício 14. O conjunto solução de $\dfrac{x}{x-11} > 1$ em $U = \mathbb{R}$ é da forma $(a, +\infty)$. Determine o valor de a.

Exercício 15. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação

$$\frac{x-2}{x+5} > 2.$$

Exercício 16. Dizemos que uma fração é *imprópria* quando o númerador é menor que o denominador. Dada a fração $\dfrac{3a+16}{5a-4}$, determine a para que esta fração seja imprópria.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 17. O conjunto solução de $\dfrac{1}{x-2} > \dfrac{1}{x-5}$ em $U = \mathbb{R}$ é da forma (a, b). Determine o valor de $a \cdot b$.

Exercício 18. O conjunto solução de $\dfrac{1}{x-9} > \dfrac{1}{x-11}$ em $U = \mathbb{R}$ é da forma (a, b). Determine o valor de $a \cdot b$.

Exercício 19. Determine o conjunto solução da desigualdade $\dfrac{1}{x-18} > \dfrac{1}{x-7}$ em $U = \mathbb{R}$.

Exercício 20. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação

$$\frac{x+3}{x+4} < \frac{x+1}{x+2}.$$

Exercício 21. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação

$$\frac{1}{x-4} < \frac{2}{x+3}.$$

Exercício 22. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-3} < 0.$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 23. O conjunto solução de $\dfrac{1}{x-4} > \dfrac{5}{(x-2)(x-4)}$ em $U = \mathbb{R}$ é da forma $(a, b) \cup (c, +\infty)$. Determine o valor de $a \cdot (b + c)$.

Exercício 24. O conjunto solução de $\dfrac{1}{x-5} > \dfrac{8}{(x-4)(x-5)}$ em $U = \mathbb{R}$ é da forma $(a, b) \cup (c, +\infty)$. Determine o valor de $a \cdot (b + c)$.

Exercício 25. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação

$$\frac{|x+3| + x}{x+2} > 1.$$

Exercício 26. Determine o número de inteiros positivos n que satisfazem

$$\frac{1}{2} < \frac{n}{n+1} < \frac{99}{100}.$$

Exercício 27. No abrigo para animais de Maria, existem 34 cachorros e 13 cachorras. A partir de agora ela decide aceitar apenas animais em pares formados por um cachorro e uma cachorra. Qual o maior número de pares de cachorros que ela pode aceitar no abrigo de modo a ter pelo menos 60% de machos entre os animais.

Exercício 28. Para quais valores de x se verifica que

$$1 < \frac{3x+10}{x+7} < 2?$$

Exercício 29. Sejam $a > b > 0$ reais dados e

$$S = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -a, -b \;\; e \;\; \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} \geq 1\}$$

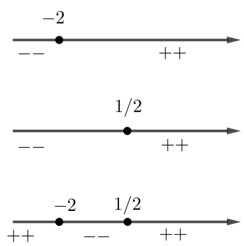
Mostre que S é a união de dois intervalos e que a soma dos comprimentos desses intervalos é 2.

Respostas e Soluções.

1. Temos

$$\begin{aligned} x+2>0 &\Leftrightarrow x>-2 \\ 2x-1>0 &\Leftrightarrow x>1/2 \end{aligned}$$

Esses dados podem ser representados no diagrama:



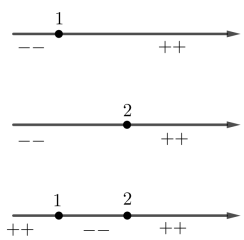
Assim, o conjunto solução da inequação é

$$S=(-\infty,-2)\cup(1/2,+\infty).$$

2. Temos

$$\begin{aligned} x-1>0 &\Leftrightarrow x>1 \\ x-2>0 &\Leftrightarrow x>2 \end{aligned}$$

Esses dados podem ser representados no diagrama:



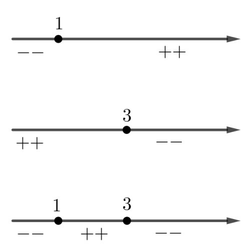
Assim, o conjunto solução da inequação é

$$S=(1,2).$$

3. Temos

$$\begin{aligned} x-1>0 &\Leftrightarrow x>1 \\ 3-x>0 &\Leftrightarrow 3>x \end{aligned}$$

Esses dados podem ser representados no diagrama:



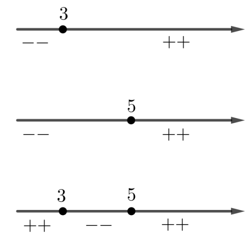
Assim, o conjunto solução da inequação é

$$S=(-\infty,1)\cup(3,+\infty).$$

4. Temos

$$\begin{aligned} (x-3)^3>0 &\Leftrightarrow x>3 \\ (x-5)^5>0 &\Leftrightarrow x>5 \end{aligned}$$

Esses dados podem ser representados no diagrama:



Assim, o conjunto solução da inequação é

$$S=(-\infty,3)\cup(5,+\infty).$$

5. Temos

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} &< 1 \\ \frac{x}{x+1}-1 &< 0 \\ \frac{-1}{x+1} &< 0. \end{aligned}$$

Isso é equivalente a $x+1>0$. Portanto o conjunto solução é $S=(-1,\infty)$.

6. Como $x-c>0$ se $x>c$ e $x-c<0$ se $x<c$, segue que $x-1$ e $x-6$ possuem mesmo sinal apenas quando $x<1$ ou $x>6$. Portanto o conjunto solução é $(-\infty,1)\cup(6,\infty)$. Daí $a\cdot b=6$.

7. Como $x-c>0$ se $x>c$ e $x-c<0$ se $x<c$, segue que $x-4$ e $x-7$ possuem mesmo sinal apenas quando $x<4$ ou $x>7$. Portanto o conjunto solução é $(-\infty,4)\cup(7,\infty)$. Daí $a\cdot b=28$.

8. Como $x-c>0$ se $x>c$ e $x-c<0$ se $x<c$, segue que $x-2$ e $x-8$ possuem mesmo sinal apenas quando $x<2$ ou $x>8$. Portanto o conjunto solução é $(-\infty,2)\cup(8,\infty)$.

9. Como $x-c>0$ se $x>c$ e $x-c<0$ se $x<c$, segue que $x-1$ e $x-6$ possuem sinais opostos apenas quando $x>1$ e $x<6$. Portanto, o conjunto solução é o intervalo $(1,6)$. Daí $a\cdot b=6$.

10. Como $x-c>0$ se $x>c$ e $x-c<0$ se $x<c$, segue que $x-4$ e $x-7$ possuem sinais opostos apenas quando $x>4$ e $x<7$. Portanto, o conjunto solução é o intervalo $(4,7)$.

11. A desigualdade é equivalente a $\dfrac{1}{x-1}-1>0$, ou seja, $\dfrac{2-x}{x-1}>0$. O numerador e o denominador dessa fração possuem o mesmo sinal apenas se $x\in(1,2)$. Portanto $a\cdot b=2$.

12. A desigualdade é equivalente a $\frac{1}{x-14} - 1 > 0$, ou seja, $\frac{15-x}{x-14} > 0$. O numerador e o denominador dessa fração possuem o mesmo sinal apenas se $x \in (14, 15)$.

13. A desigualdade pode ser reescrita como $\frac{1}{x-1} > 0$. O conjunto solução é $(1, +\infty)$.

14. A desigualdade pode ser reescrita como $\frac{11}{x-11} > 0$. O conjunto solução é $(11, +\infty)$.

15. Temos

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x+5} &> 2 \Leftrightarrow \\ \frac{x-2}{x+5} - 2 &> 0 \Leftrightarrow \\ \frac{-(x+12)}{x+5} &> 0 \Leftrightarrow \\ \frac{x+12}{x+5} &< 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Através do estudo do sinal de $x+12$ e $x+5$, podemos concluir que o conjunto solução é o intervalo $(-12, -5)$.

16. Devemos ter:

$$\begin{aligned} 3a + 16 &< 5a - 4 \\ 3a - 5a &< -4 - 16 \\ -2a &< -20 \\ 2a &> 20 \\ a &> 10. \end{aligned}$$

Assim, concluimos que a fração será imprópria para qualquer valor de a maior que 10.

17. A desigualdade pode ser reescrita como

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-5} > 0,$$

ou seja, $\frac{-3}{(x-2)(x-5)} > 0$. O conjunto solução é $(2, 5)$. Portanto $a \cdot b = 10$

18. A desigualdade pode ser reescrita como

$$\frac{1}{x-9} - \frac{1}{x-11} > 0,$$

ou seja, $\frac{-2}{(x-9)(x-11)} > 0$. O conjunto solução é o intervalo $(9, 11)$. Portanto $a \cdot b = 99$

19. A desigualdade pode ser reescrita como

$$\frac{1}{x-18} - \frac{1}{x-7} > 0,$$

ou seja, $\frac{11}{(x-18)(x-7)} > 0$. O conjunto solução é o intervalo $(18, 7)$.

20. Temos

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x+4} &< \frac{x+1}{x+2} \Leftrightarrow \\ \frac{x+3}{x+4} - \frac{x+1}{x+2} &< 0 \Leftrightarrow \\ \frac{(x+3)(x+2)-(x+1)(x+4)}{(x+4)(x+2)} &< 0 \Leftrightarrow \\ \frac{2}{(x+2)(x+4)} &< 0. \end{aligned}$$

Daí, basta que $(x+2)(x+4) < 0$. Analisando o sinal de $x+2$ e $x+4$, podemos concluir que o conjunto solução é o intervalo $(-4, -2)$.

21.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-4} &< \frac{2}{x+3} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{x-4} - \frac{2}{x+3} &< 0 \Leftrightarrow \\ \frac{(x+3)-(x-4)}{(x-4)(x+3)} &< 0 \Leftrightarrow \\ \frac{7}{(x-4)(x+3)} &< 0. \end{aligned}$$

Daí, basta que $(x-4)(x+3) < 0$. Analisando o sinal de $x-4$ e $x+3$, podemos concluir que o conjunto solução é o intervalo $(-3, 4)$.

22.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-3} &< 0 \Leftrightarrow \\ \frac{-4(x-3/2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} &< 0 \end{aligned}$$

Analisando os sinais de $x-1$, $x-3/2$, $x-2$ e $x-3$, podemos concluir que o conjunto solução é

$$S = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty).$$

23. A desigualdade pode ser reescrita como

$$\frac{1}{x-4} + \frac{-5}{(x-2)(x-4)} > 0,$$

ou seja, $\frac{x-7}{(x-2)(x-4)} > 0$. O conjunto solução é $(2, 4) \cup (7, +\infty)$. Portanto $a \cdot (b+c) = 22$.

24. A desigualdade pode ser reescrita como

$$\frac{1}{x-5} + \frac{-8}{(x-4)(x-5)} > 0,$$

ou seja, $\frac{x-12}{(x-4)(x-5)} > 0$. O conjunto solução é $(4, 5) \cup (12, +\infty)$. Portanto $a \cdot (b+c) = 68$.

25. Temos

$$\begin{aligned}\frac{|x+3|+x}{x+2} &> 1 \Leftrightarrow\\ \frac{|x+3|+x}{x+2}-1 &> 0 \Leftrightarrow\\ \frac{|x+3|-2}{x+2} &> 0.\end{aligned}$$

Podemos dividir a análise em casos.

i) Quando $x+3 \geq 0$, temos $|x+3| = x+3$ e daí

$$\frac{|x+3|-2}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+2} > 0.$$

O conjunto solução dessa inequação, levando em conta que $x+3 \geq 0$, é $(-3,-2) \cup (-1,+\infty)$

ii) Quando $x+3 < 0$, temos $|x+3| = -(x+3)$ e daí

$$\frac{|x+3|-2}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-(x+5)}{x+2} > 0.$$

O conjunto solução dessa inequação, levando em conta que $x+3 < 0$, é $(-5,-2)$

Portanto, o conjunto solução da inequação dada é

$$(-5,-2) \cup (-1,+\infty)$$

26. A primeira desigualdade é equivalente a

$$\begin{aligned}n+1 &< 2n \Leftrightarrow\\ 1 &< n.\end{aligned}$$

A segunda desigualdade é equivalente a

$$\begin{aligned}100n &< 99(n+1) \Leftrightarrow\\ n &< 99.\end{aligned}$$

Portanto, o número de inteiros positivos que satisfazem a desigualdade é igual ao número de inteiros positivos que satisfazem

$$1 < n < 99,$$

que é igual a 97.

27. Se entrarem d pares de cachorros no abrigo, a quantidade de cachorros machos passará a ser $34+d$ e a quantidade de cachorros do grupo será $47+2d$. Portanto, queremos que

$$\begin{aligned}\frac{34+d}{47+2d} &\geq \frac{60}{100} \Leftrightarrow\\ 100(34+d) &\geq 60(47+2d) \Leftrightarrow\\ 3400+100d &\geq 2820+120d \Leftrightarrow\\ 580 &\geq 20d.\end{aligned}$$

Ou seja, $d \leq 29$. Se ela aceitar 29 pares, o percentual de machos será $63/105 = 60\%$. Portanto, o maior número de pares que ela pode aceitar é $d = 29$.

28. Como

$$\frac{3x+10}{x+7} = 3 - \frac{11}{x+7},$$

as desigualdades podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}1 &< 3-\frac{11}{x+7} < 2\\ -2 &< -\frac{11}{x+7} < -1\\ -1 &< -\frac{x+7}{11} < -\frac{1}{2}\\ \frac{11}{2}-7 &< x < 11-7\\ -\frac{3}{2} &< x < 4.\end{aligned}$$

Portanto o conjunto solução da desigualdade é o intervalo $\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$.

29.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b} &\geq 1 \Leftrightarrow\\ \frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}-1 &\geq 0 \Leftrightarrow\\ \frac{-(x^2+x(a+b-2)+(ab-a-b))}{(x+a)(x+b)} &\geq 0.\end{aligned}$$

Seja r_1 e r_2 as raízes de $x^2+x(a+b-2)+(ab-a-b)$. Temos

$$\begin{aligned}-(x^2+x(a+b-2)+(ab-a-b)) > 0 &\Leftrightarrow x \notin (r_1, r_2)\\ (x+a)(x+b) > 0 &\Leftrightarrow x \in (-a,-b)\end{aligned}$$

Como $-[(-a)^2+(-a)(a+b-2)+(ab-a-b)] = b-a < 0$ e $-[(-b)^2+(-b)(a+b-2)+(ab-a-b)] = a-b > 0$, temos

$$-a < r_1 < -b < r_2$$

Daí, o conjunto solução é

$$S = (-a, r_1) \cup (-b, r_2).$$

Como $r_1+r_2 = -(a+b-2)$, segue que a soma dos comprimentos desses intervalos é

$$(r_1+a)+(r_2+b) = 2.$$

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com