Módulo de Progressões Geométricas

Definição e Lei de Formação

1^a série E.M.

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

Portal da Matemática
OBMEP

Progressões Geométrica
Definição e Lei de Formação

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Em cada P.G. abaixo, faça o que se pede:

a) Sendo $a_1 = 3$ e a razão $q = 2$, calcule a_7.

b) Sendo a_n uma P.G. crescente com $a_8 = 40$ e $a_{10} = 360$, qual o valor da razão?

c) Sendo $a_4 = 500$ e a razão $q = 5$, calcule a_1.

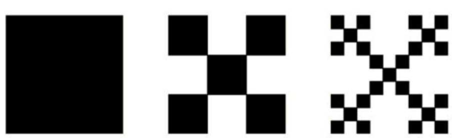
Exercício 2. Prove que se (a, b, c) estão em P.G., então $b^2 = ac$.

Exercício 3. O nono termo de uma progressão geométrica A, de razão q, é 1792 e seu quarto termo é 56. Dessa forma, qual o quarto termo de outra progressão geométrica B, com razão $q + 1$ e cujo primeiro termo é igual ao primeiro termo da progressão A?

Exercício 4. Se os números 3, A e B, nessa ordem, estão em progressão aritmética e os números 3, $A - 6$ e B, nessa ordem, estão em progressão geométrica, então quais os possíveis valores de A?

Exercício 5. Certo método de observação da troca de potássio no fluxo sanguíneo utiliza o isótopo do potássio K^{32} como marcador. Sabe-se que esse isótopo perde $5,4\%$ de sua intensidade radioativa a cada hora. Se a intensidade radioativa desse isótopo no início da observação é igual a I_0, ao final de 10 horas será igual a I_0 multiplicado por F. Qual o valor de F?

Exercício 6. Considere o padrão de construção representado pelos desenhos abaixo.



Na etapa 1, há um único quadrado com lado 1. Na etapa 2, esse quadrado foi dividido em nove quadrados congruentes, sendo quatro deles retirados, como indica a figura. Na etapa 3 e nas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos quadrados da etapa anterior. Nessas condições, qual a área restante na etapa 5?

Exercício 7. A meia vida de um elemento radioativo é o intervalo de tempo em que a massa de uma amostra deste elemento se reduz à metade. O Cobalto-60, usado na medicina como fonte de radiação, tem meia vida de 5 anos. Qual a porcentagem de sua atividade original que permanecerá no fim de 25 anos?

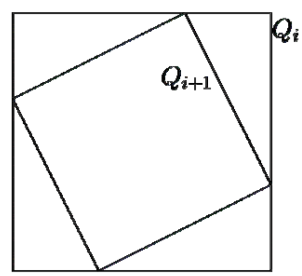
2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Desde o tsunami que atingiu a central de Fukushima em 2011, afetando os sistemas de refrigeração dos reatores, já ocorreram vários vazamentos, o último com aproximadamente 300 toneladas de água altamente radioativa, que pode ter sido escoada para o Oceano Pacífico. O Césio 134 e Estrôncio 90 são alguns dos 63 elementos presentes nesse acidente. A meia-vida do Estrôncio 90 é de 28 anos. Considere uma massa de $m_0 = 10$ toneladas dessa substância. Qual é o tempo transcorrido para que a massa se reduza a $\dfrac{1}{8}$ da inicial?

Exercício 9. Para fazer a aposta mínima na mega-sena uma pessoa deve escolher 6 números diferentes em um cartão de apostas que contém os números de 1 a 60. Uma pessoa escolheu os números de sua aposta, formando uma progressão geométrica de razão inteira. Quais os números da aposta feita?

Exercício 10. A soma de três números que formam uma progressão geométrica crescente é 19. Sabendo que, se subtrair "1" (uma unidade) ao primeiro número, sem alterar os outros dois, eles passam a constituir uma progressão aritmética, então qual o primeiro número dessa progressão geométrica crescente?

Exercício 11. Uma sequência infinita de quadrados é construída da seguinte forma: dado um quadrado Q_i, constrói-se outro quadrado Q_{i+1}, cujos vértices estão sobre os lados de Q_i e de tal forma que a distância de qualquer vértice de Q_{i+1} ao vértice de Q_i mais próximo dele é igual a $\dfrac{1}{3}$ do lado de Q_i. Além disso, o lado de Q_1 é 3.



Sobre essa sequência de quadrados:

a) qual o valor do lado Q_2?

b) qual o valor de Q_3?

c) qual o valor de Q_4?

d) qual a sequência formada pelo Q_i's?

e) qual o valor de Q_n?

f) É possível afirmar que as diagonais de todos os quadrados construídos se intersectam no mesmo ponto?

Exercício 12. Com os 13 dados de uma amostra dispostos numa sequência em ordem crescente, verificou-se que os seus termos formam uma progressão geométrica tal que a soma do terceiro e do nono termos é igual a 54, enquanto que o quarto e o décimo termos têm soma igual a $54\sqrt{2}$. Qual a mediana dessa amostra?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 13. Uma progressão aritmética de três termos tem $a_1 = 9$. Se adicionarmos 2 ao segundo termo e 20 ao terceiro termo, o trio resultante formará uma progressão geométrica. Qual o menor valor possível para o terceiro termo da P.G. resultante?

Exercício 14. Defina um número geométrico de 3 dígitos como aquele que possui 3 algarismos distintos e, quando lido da esquerda para direita, cada dígito em sua ordem ocupa a posição de um termo numa progressão geométrica. Calcule a diferença entre o maior e o menor número geométrico.

Exercício 15. Determinados seres vivos microscópicos, como as bactérias se reproduzem por divisão celular. Cada célula simplesmente se divide em duas em intervalos regulares de tempo. Considere inicialmente uma população de 1024 bactérias e suponha que esta população se duplique a cada 20 minutos. Após 3 horas, qual a potência de dois que representará a população de bactérias?

Exercício 16. Determinar $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$, sabendo-se que:

(a) são números em progressão geométrica, nesta ordem;

(b) $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ possuem quatro dígitos e a_10 possui cinco dıgitos (OBS.: todos os números a_1 , a_2 , a_3 , . . . , a_{10} estão na base 10)

Exercício 17. Suponha que $a_1 = 2$ e que $a_{k+1} = 3a_k + 1$, para todo $k \geq 1$. Sabendo que $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$, encontre uma fórmula geral para a soma

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Respostas e Soluções.

1. Usaremos as fórmulas de P.G. para resolver os itens abaixo:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$a_m = a_n \cdot q^{m-n}$$
$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

a) $a_7 = a_1 \cdot q^6 = 3 \cdot 2^6 = 192$.

b) $a_{10} = a_8 \cdot q^2$, assim

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_8 \cdot q^2 \\ 360 &= 40 \cdot q^2 \\ q^2 &= \frac{360}{40} \\ q &= \pm\sqrt{9} = \pm 3. \end{aligned}$$

Como a progressão é crescente, devemos ter $q = 3$.

c) Podemos escrever que

$$\begin{aligned} a_4 &= a_1 \cdot q^3 \\ 500 &= a_1 \cdot 5^3 \\ a_1 &= \frac{500}{125} = 4. \end{aligned}$$

2. Se algum deles é nulo, o resultado é imediato. Caso contrário, como (a, b, c) estão em P.G., temos

$$\begin{aligned} q &= \frac{b}{a} \\ q &= \frac{c}{b}, \end{aligned}$$

o que permite escrevermos

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{c}{b} \\ b^2 &= ac. \end{aligned}$$

3. (Adaptado do vestibular do UERN) $-$ 2015**)**
Podemos escrever que

$$\begin{aligned} A_9 &= A_4 \cdot q^5 \\ 1792 &= 56 \cdot q^5 \\ q^5 &= \frac{1792}{56} \\ q &= \sqrt[5]{32} = 2. \end{aligned}$$

Daí, podemos calcular

$$\begin{aligned} A_4 &= A_1 \cdot q^3 \\ 56 &= A_1 \cdot 2^3 \\ A_1 &= \frac{56}{8} = 7. \end{aligned}$$

temos $q_B = 3$, $B_1 = 7$ e seguimos com

$$B_4 = B_1 \cdot q^3 = 7 \cdot 3^3 = 189.$$

4. (Adaptado do vestibular do MACK (SP) $-$ 2015**)**
Como $(3, A, B)$ estão em P.A., então

$$2A = B + 3 \text{ e } B = 2A - 3.$$

Sendo $(3, A-6, B)$ uma P.G., temos

$$\begin{aligned} (A-6)^2 &= 3B \\ A^2 - 12A + 36 &= 3(2A-3) \\ A^2 - 12A + 36 &= 6A - 9 \\ A^2 - 18A + 45 &= 0 \\ A &= \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 1 \cdot 45}}{2} \\ A &= \frac{18 \pm \sqrt{144}}{2} \\ A &= \frac{18 \pm 12}{2} \\ A_1 &= 15 \\ A_2 &= 3 \end{aligned}$$

Se $A = 15$, então $B = 27$. Daí, a primeira sequência fica $(3, 15, 27)$, que é uma P.A. de diferença comum 12, e a segunda sequência, $(3, 9, 27)$.
Para $A = 3$ temos $B = 3$, logo a P.A. será $(3, 3, 3)$, com diferença igual a zero, e a P.G. ficará $(3, -3, 3)$, com razão (-1).

5. (Adaptado do vestibular da FAMERP (SP) $-$ 2015**)**
Se há uma perda de $5,4\% = 0,054$ então a cada hora ficam

$$1 - 0,054 = 0,946.$$

Assim, depois de 10 horas teremos $I_0 \cdot 0,946^{10}$, então $F = 0,946^{10}$.

6. (Adaptado do vestibular da UFRGS $-$ 2014**)**
Considerando a sequência A das áreas, podemos escrever $A_1 = 1$, $A_2 = \frac{5}{9}$, $A_3 = \frac{25}{81}$, $\ldots$, o que caracteriza uma P.G. de razão $\frac{5}{9}$. Assim, o $A_5 = \frac{625}{6561}$.

7. (Adaptado do vestibular da UNISC (RS) $-$ 2014**)**
No período de 25 anos, há 5 decaimentos de meia vida, assim, a porcentagem será $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 100\% = \frac{100}{32}\% = 3,125\%$ da original.

8. (Adaptado do vestibular da Unievangélica (GO) $-$ 2014**)**
Como a meia-vida é de 28 anos, teremos que $a_1 = 28$ (metade da massa inicial), $a_2 = 56$ (um quarto do m_0) e $a_3 = 84$ (um oitavo). Assim, o tempo decorrido será de 84 anos.

9. (Adaptado do vestibular da UEFS (BA) $-$ 2015**)**
Iniciemos destacando que a razão deve ser inteira (enunciado) e além disso devemos ter $a_6 < 60$, ou seja, $a6 = a_1 \cdot q^5 < 60$. Daí, se $q = 3$ teremos $q^5 = 243$, logo $q = 2$ e $q^5 = 32$.Por fim, sendo $2^6 = 64 > 60$, precisaremos do $a_1 = 1$ e a sequência fica

$$(1, 2, 4, 8, 16, 32).$$

10. (Adaptado do vestibular da UFT (TO) − 2015)
Sendo (a, b, c) os termos dessa P.G. crescente, podemos escrever que

$$b^2 = ac \text{ e } a + b + c = 19$$

Agora, fazendo a subtração de "1" (uma unidade) ao primeiro número, sem alterar os outros dois, formaremos a P.A. $(a - 1, b, c)$ e teremos

$$2b = (a - 1) + c \text{ ficando com } a + c = 2b + 1$$

Daí, obtemos

$$b + 2b + 1 = 19 \text{ e } b = 6.$$

Na sequência, procedendo as substituições, encontraremos $a = 3$ e $c = 12$.

11. (Adaptado do vestibular da UEM (PR) − 2014)

a) Temos que Q_2 é a hipotenusa de um triângulo de catetos 1 e 2, sendo assim

$$\begin{aligned} Q_2^2 &= 1^2 + 2^2 \\ Q_2 &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

b) Temos que Q_3 é a hipotenusa de um triângulo de catetos $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ e $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$, sendo assim

$$\begin{aligned} Q_3^2 &= \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2 \\ Q_3 &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

c) Temos que Q_4 é a hipotenusa de um triângulo de catetos $\dfrac{5}{9}$ e $\dfrac{10}{9}$, sendo assim

$$\begin{aligned} Q_4^2 &= \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 \\ Q_4 &= \frac{5\sqrt{5}}{9}. \end{aligned}$$

d) Em geral, se o lado de um quadrado for l, o lado do próximo quadrado será $\sqrt{\left(\dfrac{l}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2l}{3}\right)^2} = \dfrac{l\sqrt{5}}{3}$. Analisando a sequência formada, ela se trata de uma P.G. com razão $q = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

e) Sendo uma P.G. temos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ou seja

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{n-1}.$$

f) Uma rotação de $90°$ do quadrado Q_i em torno do seu centro gera a mesma figura. Como o centro de Q_{i+1} se manteve invariante, ele coincide com o centro do quadrado Q_i. Assim, todos os quadrados possuem o mesmo centro que o quadrado Q_1 e todas as diagonais se encontram nele.

12. (Adaptado do vestibular da USP − 2014)
Podemos escrever que

$$\begin{cases} a_3 + a_9 = 54 \\ a_4 + a_{10} = 54\sqrt{2} \end{cases}$$

Agora, como

$$\begin{aligned} a_4 + a_{10} &= a_3 \cdot r + a_9 \cdot r \\ r \cdot (a_3 + a_9) &= 54\sqrt{2} \\ r \cdot 54 &= 54\sqrt{2} \\ r &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

A mediana é o termo a_7. Daí, podemos escrever que

$$\begin{aligned} a_4 + a_{10} &= \frac{a_7}{r^3} + a_7 \cdot r^3 \\ \frac{a_7}{2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} \cdot a_7 &= 54\sqrt{2} \\ \frac{a_7 + 8a_7}{2\sqrt{2}} &= 54\sqrt{2} \\ 9a_7 &= 54\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \\ a_7 &= 24. \end{aligned}$$

13. (Adaptado do AMC)
Seja d a diferença comum na P.A.. Daí, 9, $9 + d + 2 = 11 + d$, $9 + 2d + 20 = 29 + 2d$ formarão uma P.G., o que permite escrevemos

$$\begin{aligned} (11 + d)^2 &= 9(2d + 29) \\ d^2 + 4d - 140 &= (d + 14)(d - 10) = 0. \end{aligned}$$

Nesse caso, o menor valor é $d = -14$, e o terceiro termo fica igual a

$$a_3 = 2(-14) + 29 = 1.$$

14. (Extraído do AIME)

Uma solução:
Assuma que o o maior número geométrico comece com 9 (o 9 ocupe a casa da centena). Sabemos que a razão deve ser um número racional do tipo $k/3$ para algum $k \in \mathbb{N}$, pois deveremos ter algarismos inteiros em cada ordem. Quando $k = 1$, o número é 931, para $k = 2$, obtemos 964 e, por fim, se $k = 3$, então chegaremos a 999, mas os dígitos precisam ser distintos. Pelo mesmo raciocínio, o menor número geométrico é o 124. O maior ficou 964 e o menor foi 124, cuja diferença $964 - 124 = 840$.

Outra solução:
Considere $\overline{abc}$ como um número de três dígitos na base 10. Se eles estiverem em progressão geométrica, precisamos ter $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, ou seja, $b^2 = ac$.
Os menor e maior números geométricos ocorrerão quando a for minimizado e majorado, respectivamente. O mínimo acontece quando $a = 1$; faremos $b = 2$ e encontraremos $c = 4$, então o menor número geométrico é igual a 124.
Para o valor número máximo, observe que em $b^2 = 9c$, b é

majorado quando $a = 9$ e $9c$ é o maior quadrado perfeito formado. O que ocorre para $c = 4$, levando a $b = 6$. O maior ficou 964 e o menor foi 124, cuja diferença $964 - 124 = 840$.

Mais uma solução:
O menor número geométrico é 124, pois 123 e nem outro valor contento o zero são permitidos. O maior é o 964, pois o algarismo central não pode ser 8 ou 7 . Por fim, a substração fica

$$964 - 124 = 840.$$

15. (Extraído do vestibular da UFGD (MS) $-$ 2014**)**

Observe que em 3 horas há nove intervalos de vinte minutos, sendo assim, desejamos calcular

$$\begin{aligned} a_9 &= a_1 \cdot r^8 \\ a_9 &= 1024 \cdot 2^8 \\ a_9 &= 2^{10} \cdot 2^8 = 2^{18}. \end{aligned}$$

16. (Extraído da Olimpíada Cearense de Matemática - 2001) Seja r a razão da progressão geométrica. Como os números são inteiros, r deve ser um racional, ou seja, $r = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros primos entre si. Claramente não podemos ter $r = 1$, pois existem números distintos na progressão e se $r < 1$ a quantidade de dígitos dos últimos termos não poderia aumentar. Se $r > 2$, vale que $a_{10} = a_1 r^9 > 10^4 \cdot 2^9 > 10^6$ e isso implicaria em a_{10} possuir mais de 5 dígitos. Portanto, $r < 2$. Dado que $a_{10} = \frac{a_1 p^9}{q^9}$ é inteiro com 5 dígitos, devemos ter $q^9 \mid a_1$. Sabendo que a_1 possui 4 dígitos e que $3^9 = 19683 > 10^5$, só podemos ter $q = 1, 2$. Se $q = 1$, $10^5 < a_{10} = a_1 p^9 < 10^6$. Isso é um absurdo, pois não podemos ter $p = 1$ e caso $p \neq 1$ vale que $p^9 > 10$. Assim, $r = 3/2$, e $512 = 2^9 \mid a_1$. Se $a_1/2^9 \geq 3$, teremos

$$a_6 = a_1(3/2)^5 \geq 3 \cdot 3^5 \cdot 2^4 > 10^5.$$

Isso é um absurdo. Além disso, como a_1 possui 4 dígitos, só podemos ter $a_1 = 512 \cdot 2 = 1024$ e $a_n = 2^{11-n} \cdot 3^{n-1}$, para $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$.

17. Somando $1/2$ a ambos os membros da equação que define os termos da sequência, obtemos

$$a_{k+1} + 1/2 = 3(a_k + 1/2).$$

Portanto, a sequência $b_k = a_k + 1/2$ é uma P.G. de razão 3 com termo inicial $b_1 = 5/2$. Daí, $b_k = 5/2 \cdot 3^{k-1}$ e

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots a_n &= \\ (b_1 - 1/2) + (b_2 - 1/2) + \ldots + (b_n - 1/2) &= \\ (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) - n/2 &= \\ 5/2(1 + 3 + \ldots + 3^{n-1}) - n/2 &= \\ \frac{5(3^n - 1)}{4} - \frac{n}{2}. & \quad . \end{aligned}$$

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com