Problemas dos Círculos Matemáticos

Problemas extras para os Capítulos 5 e 6

Portal da Matemática
OBMEP

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Escrevendo os números naturais de 1 até 10 em fila mantendo um espaço vazio entre eles ($\square$) obtemos

$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 \square 10.$$

É possível ocupar os $\square$ com sinais de "$+$" ou "$-$" de modo que o resultado de expressão que aparecerá após a colocação dos sinais seja **zero**?

Exercício 2. Sabemos que $3x$ deixa resto -1 quando dividido por 2 e que $12x$ deixa resto 1 quando dividido por 11. Qual o resto que x deixa quando dividido por 22?

Exercício 3. Sabemos que $8x$ deixa resto 3 quando dividido por 7 e que $20x$ deixa resto 10 quando dividido por 19. Qual o resto que x deixa quando dividido por 133?

Exercício 4. Observe a sequência de algarismos

$$12345678910121314151617\ldots.$$

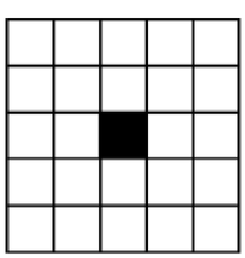
Qual será o 1002° algarismo usado nela?

Exercício 5. Na soma abaixo, letras iguais representam dígitos iguais e letras diferentes dígitos diferentes.

$$\begin{array}{cccc} & & & X \\ + & & & X \\ & & Y & Y \\ \hline & Z & Z & Z \end{array}$$

Qual o dígito representado pela letra X?

Exercício 6. Na figura a seguir, temos um quadrado 5×5 que contém um quadrado preto central. Existe uma coleção de quadrados com lados paralelos aos lados do tabuleiro com dimensões que variam de 1×1 a 5×5 formados pelos quadradinhos da figura. Quantos elementos dessa coleção contém o quadrado escuro preto?



Exercício 7. (a) Em uma festa com 23 pessoas, é possível que cada um possua 1, 3 ou 5 amigos na festa?

(b) É possível desenhar 9 segmentos de reta no plano de tal forma que cada um intersecta exatamente 3 outros?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Ana quer fazer duas aulas de natação por semana, uma de manhã e a outra à tarde. A escola de natação tem aulas de segunda a sábado às $9h$, $10h$ e $11h$ e de segunda a sexta às $17h$ e $18h$. De quantas maneiras distintas Ana pode escolher o seu horário semanal, de modo que ela não tenha suas aulas no mesmo dia nem em dias consecutivos?

a) 96.

b) 102.

c) 126.

d) 144.

e) 180.

Exercício 9. Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6$, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

Exercício 10. Dos anagramas da palavra CASTELO, quantos têm as vogais em ordem alfabética e juntas?

Exercício 11. Quinze pessoas, sendo 5 homens de alturas diferentes e 10 mulheres também de alturas diferentes, devem ser dispostas em fila, obedecendo ao critério: homens em ordem crescente de altura e mulheres em ordem decrescente de altura. De quantos modos diferentes essas 15 pessoas podem ser dispostas na fila?

Exercício 12. Discos dentados geram um tipo de sistema associado que funciona pela propulsão em um dos discos e esse proporciona o funcionamento dos demais. A figura 1 ilustra um desses sistemas e o disco "número 1" gira no sentido horário. Analise as proposições e responda o que se pede.

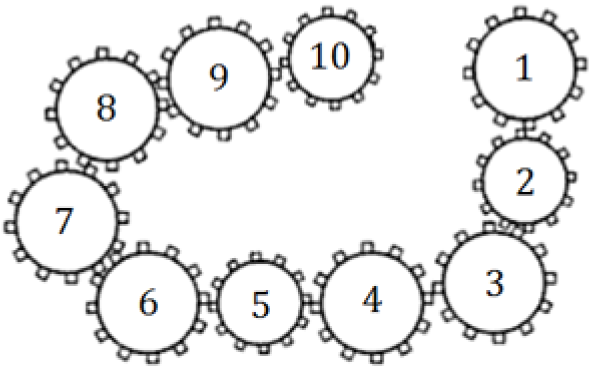


Figura 1

i) O disco 2 gira no sentido anti-horário.

ii) O disco 4 gira no sentido horário.

iii) O disco 7 gira no mesmo sentido do disco 5.

iv) O disco 10 gira no mesmo sentido do disco 3.

v) Seria possível colocar um disco 11 em contato ao mesmo tempo nos discos 1 e 10.

Quantas das proposições acima são verdadeiras?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 13. Prove que numa festa com n pessoas, o número de pessoas que conhecem um número ímpar de outras pessoas na festa é par.

Exercício 14. Bitonho está jogando em seu computador o Super Paciência, cujo objetivo é preencher um tabuleiro 2×2014 com algarismos 0's e 1's de modo que dois números vizinhos iguais em uma mesma linha impedem que se preencha também com números iguais as casas correspondentes da outra linha. Por exemplo, no desenho abaixo, os valores de A e B não podem ser iguais.

0	1	0	...	1	1	...
1	1	0	...	A	B	...

Determine o número de possíveis preenchimentos distintos de tal tabuleiro seguindo as regras do Super Paciência.

Exercício 15. Um baralho tem 900 cartas numeradas de 100 a 999. Cartas cuja soma dos algarismos é a mesma, possuem a mesma cor e cartas com somas distintas, cores diferentes. Alice, Bia, Carla e Dani pegam, cada uma, uma certa quantidade de cartas.

a) Todas as cartas que Alice pegou tinham cores diferentes. Qual a quantidade máxima de cartas que Alice pode ter pego?

b) Bia pegou todas as cartas que possuem o algarismo 1. Quantas cartas Bia pegou?

c) Carla pegou todas as cartas com exatamente 2 algarismos iguais. Quantas cartas Carla pegou?

d) Dani disse: – Peguei duas cartas com a mesma cor e números consecutivos. É possível que isso tenha acontecido?

Exercício 16. Duzento estudantes participaram de uma competição de matemática consistindo de seis problemas. Sabe-se que cada problema foi resolvido corretamente por pelo menos 120 estudantes. Prove que existem dois estudantes que juntos resolveram todos os seis problemas.

Exercício 17. a) Quantos números de quatro algarismos têm soma de seus algarismos par?

b) Um número com dois dígitos distintos e não nulos é chamado de bonito se o dígito das dezenas é maior do que o dígito das unidades. Quantos números bonitos existem?

c) Quantos números pares de quatro dígitos podemos formar utilizando os algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5$ sem utilizar o mesmo algarismo duas vezes?

d) Qual a média de todos os números de 5 algarismos que podem ser formados usando cada um dos dígitos 1, 3, 5, 7 e 8 exatamente uma vez?

Exercício 18. Cientistas estão reunidos para um congresso matemático. Sabe-se que dois cientistas com o mesmo número de amigos não possuem amigos em comum. Se existem cientistas que se conhecem, prove que existe um cientista que possui apenas um amigo.

Respostas e Soluções.

1. Observe que se isso for possível, poderemos separar os números de 1 até 10 em dois conjuntos de modo que a soma S dos elementos do primeiro seja igual a soma dos elementos do segundo. Como esses conjuntos têm todos os números citados, então

$$\begin{aligned} S+S &= 1+2+3+4+\cdots+10 \\ 2S &= \frac{10\cdot(1+10)}{2} \\ 2S &= 55. \end{aligned}$$

Mas $2S$ é um número par e 55 é um número ímpar, então essa equação não tem solução inteira, daí, não tem como cumprir o que o problema perguntou.

2. Como $3 \equiv 1 \pmod 2$, $12 \equiv 1 \pmod{11}$ e $-1 \equiv 1 \pmod 2$, segue que

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 2 \\ x &\equiv 1 \pmod{11} \end{aligned}$$

Além disso, como $MDC(2,11) = 1$, segue que $x-1$ é um múltiplo de $2\cdot 11 = 22$. Portanto x deixa resto 1 na divisão por 22.

3. Como $8 \equiv 1 \pmod 7$, $20 \equiv 1 \pmod{19}$ e $3 \equiv 10 \pmod 7$, segue que

$$\begin{aligned} x &\equiv 10 \pmod 7 \\ x &\equiv 10 \pmod{19} \end{aligned}$$

Além disso, como $MDC(7,19) = 1$, segue que $x-10$ é um múltiplo de $7\cdot 19 = 133$. Portanto x deixa resto 10 na divisão por 133.

4. Comecemos as contagens iniciais:

i) de 1 até 9 são $9-1+1 = 9$ dígitos.

ii) de 10 até 99 são $(99-10+1)\times 2 = 180$ dígitos.

iii) de 100 até 999 são $(999-100+1)\times 3 = 2700$ dígitos.

No último dígito do 999 teremos o

$$(9+180+2700) = 2889^{\circ} \text{ termo}$$

e o 1002° já terá passado. Portanto não iremos até o 999, mas até o n. Observe que de 100 até n temos $100-n+1$ números de 3 algarismos, logo, são $(n-100+1)\times 3$ dígitos nessa sequência. Seguindo com

$$\begin{aligned} 9+180+3\cdot(n-99) &= 1002 \\ 3\cdot(n-99) &= 1002-189 \\ 3\cdot(n-99) &= 813 \\ 3n-297 &= 813 \\ 3n &= 813+297 \\ 3n &= 1110 \\ n &= \frac{1110}{3}. \\ n &= 370. \end{aligned}$$

Então, ao escrevermos o número 370 teremos 1002 termos na sequência, logo o 1002° termo será o 0.

5. Inicialmente note que $X+X+Z \leq 2\cdot 9+8 = 26$. Portanto, será acrescentado na casa das dezenas no máximo 2 unidades. Como $Y \neq Z$, ao somarmos 1 ou 2 unidades a Y devemos obter o número de dois dígitos $\overline{ZZ}$. Como $Y+2 \leq 9+2 = 11$, a única possibilidade é termos $\overline{ZZ} = 11$, assim, $Y = 9$. Para que a soma $2X+Y$ termine em 1 e tenha $X \neq 1$, devemos ter $X = 6$. De fato, esses valores satisfazem a soma:

$$\begin{array}{cccc} & & & 6 \\ + & & & 6 \\ & & 9 & 9 \\ \hline & 1 & 1 & 1. \end{array}$$

6. Como existem apenas 5 tipos de quadrados, a saber, os que possuem dimensões 1×1, 2×2, 3×3, 4×4 e 5×5, podemos separar a contagem em cinco itens:

(a) Existe apenas 1 quadrado de dimensão 1×1 contendo o quadrado preto, que é o próprio quadrado preto.

(b) Existem 4 quadrados de dimensão 2×2 contendo o quadrado preto.

(c) Existem 9 quadrados de dimensão 3×3 contendo o quadrado preto.

(d) Existem 4 quadrados de dimensão 4×4 contendo o quadrado preto.

(e) Existe apenas 1 quadrado de dimensão 1×1 contendo o quadrado preto.

Portanto, o número de elementos da coleção que contém o quadrado preto central é $1+4+9+4+1 = 19$.

7.

(a) A soma das quantidades de amigos de cada pessoa é o dobro da quantidade de relações de amizades totais, pois cada uma é contada duas vezes. Como uma soma de 23 números ímpares é sempre um ímpar, não é possível que todos na festa possuam apenas 1, 3 ou 5 amigos.

(b) Considere um segundo desenho em que cada vértice representa um segmento do primeiro desenho e que dois deles são ligados se os segmentos correspondentes se intersectam. O novo desenho resultante precisa ter 9 vértices e de cada um deles deve sair exatamente 3 segmentos. De modo análogo ao item anterior, como a soma das quantidades de segmentos que partem de cada vértice no segundo desenho dever ser $9 \cdot 3 = 27$, ele não pode existir. Assim, a condição sobre a interseção dos 9 segmentos não pode ser realizada.

8. (OBMEP 2013) Dividindo os possíveis horários em dois casos, temos:

i) Com aula aos sábados: escolhendo aula sábado, são 3 possibilidades; sua aula à tarde, são 2 possibilidades de horário e 4 possibilidades de dias. Temos então $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ possibilidades;

ii) Sem aula aos sábados: são 6 possibilidades de dias não consecutivos, sendo um pela manhã outro pela tarde (2 possibilidades). O horário pela manhã tem 3 possibilidades e pela tarde, 2 possibilidades, chegando a um total de $6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot = 72$ possibilidades para este caso.

Assim, o total de possibilidades é $24 + 72 = 96$. Resposta A.

9. O total de números nos quais 3 e 4 ocupam posições adjacentes é $2P_5 = 2 \cdot 5! = 240$. Basta agora subtrair os números em que 1 e 2 ocupam posições adjacentes, que são $2 \cdot 2 \cdot P_4 = 4 \cdot 4! = 96$. Assim temos $240 - 96 = 144$ números.

10. Como são três vogais, consideramo-nas como um bloco rígido, passando a ter 5 letras. Assim o total de anagramas é $P_5 = 120$.

11. Se são quinze pessoas, teremos quinze lugares na fila. Como existe uma sequência fixa de posicionamente entre os homens, ou seja, primeiro deve estar o menor, depois o segundo menor e assim por diante, precisamos apenas escolher as cinco posições, dentre as quinze, para os homens. O mesmo acontece para as mulheres. Sendo assim, resolver esse problema é o mesmo que contar a quantidade de anagramas de uma palavra com cinco letras iguais e outras dez letras iguais (permutação com repetição). Temos então $P_{15}^{10,5} = \dfrac{15!}{10! \cdot 5!} = 3.003$.

12. (Adaptado do livro Círculos Matemáticos) Observe que cada disco dentado gira no sentido inverso que o dos seus vizinhos. Como o disco 1 gira no sentido horário, o 2 ficará no anti-horário, o 3 no horário, e assim por diante. O que conclui que os ímpares ficaram no sentido horário e os pares no anti-horário. Portanto, as proposições verdadeiras são as *i* e *iii*. Serão apenas 2 proposições corretas.

13. Numere as pessoas de 1 até n e denote por d_i o número de amigos da pessoa i. Imagine que existe um fio entre duas pessoas que se conhecem. Se E denota a quantidade de fios, temos

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2E,$$

pois cada fio é contado duas vezes, um para cada ponta. Como o lado direito é par, no lado esquerdo devemos ter uma quantidade par de números ímpares.

14. (Extraído da OBM) Existem 4 tipos possíveis de colunas e as regras do Super Paciência se resumem a não preenchermos uma certa coluna com a mesma configuração da coluna imediatamente anterior. Assim, uma vez que Bitonho escolheu os números de uma determinada coluna, ele possui 3 opções de preenchimento para a próxima. No início, podemos escolher livremente como preencher a primeira coluna mais à esquerda e isso pode ser feito de 4 formas. Em seguida, ao preenchermos as próximas colunas à direita, teremos 3 opções. Portanto, o total de preenchimentos é:

$$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 4 \cdot 3^{2013}$$

15.

a) 27 cartas. A quantidade máxima de cartas que Alice pegou corresponde à quantidade de diferentes somas dos algarismos dos números de 100 a 999. Como a menor soma é $1 + 0 + 0 = 1$ e a maior é $9 + 9 + 9 = 27$, então o total de somas é 27. Para garantir que existem todas essas somas, podemos listar um exemplo de cada soma: 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 939, 949, 959, 969, 979, 989, 999.

b) 233 cartas. De 100 a 199, todas possuem o 1, ou seja, 100 cartas; de 200 a 299, são 19 cartas (201, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 221, 231, 241, 251, 261, 271, 281, 291); de 300 a 399, de 400 a 499 e assim por diante, é a mesma quantidade que de 200 a 299. Portanto, o total de cartas que possui o 1 é $100 + 7 \cdot 19 = 233$.

c) 243 cartas. Vamos contar quantas cartas possuem exatamente o 1 duas vezes. Com o 1 na casa das unidades e na casa das dezenas, são 8 possibilidades, já que o 0 não pode ocupar a casa das centenas, enquanto que, com o 1 na casa das unidades e na casa das centenas, assim como na casa das dezenas e na casa das centenas, são 9 possibilidades cada. Portanto, são $8+9+9=26$ cartas com o 1 se repetindo exatamente 2 vezes. Para os demais algarismos, com exceção do zero, esta quantidade se repete. O zero se repetirá exatamente duas vezes nos números 100, 200, 300, ..., 900, ou seja, 9 vezes. Portanto, o total de cartas que Carla pegou é $9 \cdot 26 + 9 = 243$.

d) Impossível. Existem 3 casos de números consecutivos:

1. Números do tipo abc e $ab(c+1)$, com $c \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$: neste caso devemos ter $a+b+c = a+b+c+1$, que é absurdo.
2. Números do tipo $ab9$ e $a(b+1)0$: neste caso devemos ter $a+b+9 = a+b+1+0$, que é absurdo.
3. Números do tipo $a99$ e $(a+1)00$: neste caso devemos ter $a+9+9 = a+1+0+0$, que também é absurdo.

Portanto, é impossível a situação descrita por Dani.

16. Façamos um tabuleiro 200×6 representando o resultado dos estudantes. Cada linha representará um estudante e cada problema resolvido pelo estudante i será marcado com o número 1 na tabela. Caso o problema não tenha sido resolvido, marcaremos o número zero. Pensemos inicialmente em casos extremais. O que acontece se um estudante resolveu os seis problemas? Basta escolhermos um estudante qualquer e a dupla desejada estará formada. Se um estudante resolveu 5 problemas, também podemos obter facilmente nossa dupla. E se um estudante tiver resolvido exatamente 4 problemas? Suponha, sem perda de generalidade, que ele não resolveu os problemas 5 e 6. Sabemos que pelo menos 120 pessoas resolveram o problema 5. Se nenhuma delas tiver resolvido o problema 6, saberemos que no máximo 80 pessoas o resolveram. Mas isso contradiz o enunciado e assim temos certeza que pelo menos uma pessoa resolveu ambos os problemas. Resta mostrar que esse tipo de situação sempre acontece, i.e., existe alguém que resolveu pelo menos 4 problemas. Agora usaremos a contagem dupla. A soma dos número das colunas é pelo menos $6 \times 120 = 720$. Como existem 200 linhas, pelo menos uma delas terá soma $\frac{720}{200} > 3$, ou seja, pelo menos uma linha terá 4 números 1's

17.

a) Para que a soma seja par, devemos utilizar quatro, dois ou nenhum algarismo par. Eles podem ocupar as seguintes ordens: unidades de milhar, centenas, dezenas ou unidades.

i) No primeiro caso, o zero não pode ocupar a maior ordem e as outras podem ser ocupadas por quaisquer dos 5 números pares, resultando num total de
$$4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500 \text{ números.}$$

ii) No segundo caso, há duas formações, a saber:

– Quando o primeiro dígito é ímpar, temos 5 opções para a maior ordem. Daí, ficamos com 3 opções para posicionar o outro algarismo ímpar. Separada a ordem desse algarismo, existem 5 opções de ímpares a serem colocados no local e, nas posições restantes, quaisquer um dos 5 pares podem ser postos. Isso gera
$$5 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 1875 \text{ números.}$$

– Quando o primeiro dígito é par, mais uma vez, excluímos a possibilidade do zero ocupar a maior ordem. Existem três escolhas para a posição do outro par e as 5 opções para o seu valor. As duas ordens restantes podem ser ocupadas por qualquer um dos 5 ímpares, totalizando
$$4 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 1500 \text{ números.}$$

No último caso, quando nenhum algarismo é par, temos
$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625 \text{ possibilidades.}$$

Daí, o total de número é $500 + 1875 + 1500 + 625 = 4500$.

b) Começando pelo 9, temos o conjunto de números bonitos $\{98, 97, \ldots, 90\}$, que possui 9 números. Iniciando pelo 8, temos $\{87, 86, \ldots, 80\}$, que possui 8 números, e assim por diante até o conjunto dos que começam pelo 1, que é $\{10\}$. Totalizando assim $9+8+7+\cdots+2+1 = 45$ números.

c) Existem apenas três algarismos pares e a contagem pode ser dividida em dois casos: se o último algarismo for zero, temos $5 \times 4 \times 3 = 60$ possibilidades; se o último dígito não for zero, temos $4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$. Portanto, o total de números é $60 + 96 = 156$.

d) Fixado um algarismo da lista, ele irá aparecer em uma dada ordem em outros $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ números. Cada vez que um número aparece em uma dada ordem, a sua contribuição na soma total é igual ao seu produto pela potência de 10 associada àquela ordem. Por exemplo, nos números 13578 e 13857, a contribuição do 5 é $5 \cdot 10^2$ e $5 \cdot 10^1$, respectivamente. Como todo número aparece igual número de vezes em cada ordem, a contribuição de cada algarismo na soma total é igual ao seu produto por $24 \cdot (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0) = 24 \cdot 11111$. Além disso, a quantidade total de números é $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Portanto, a média é
$$\frac{(1+3+5+7+8) \cdot 24 \cdot 11111}{120} = 53332,8$$

18. Sejam P o cientista com a maior quantidade de amigos, digamos $P_1, P_2, \ldots, P_k$, e d_i a quantidade de amigos de P_i, $1 \leq i \leq k$. Portanto, $d_1, d_2, \ldots, d_k \leq k$. Suponha que não exista $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ para o qual $d_i = 1$, assim

$$d_1, d_2, \ldots, d_k \geq 2$$

e daí

$$\{d_1, \ldots, d_k\} \subseteq \{2, 3, \ldots, k\}.$$

Pelo Princípio da Casa dos Pombos, existem $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tais que $d_i = d_j$. Isso diz que P_i e P_j têm a mesma quantidade de amigos, o que contraria as condições do problema, uma vez que ambos conhecem P.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com