Introdução ao Cálculo – Limites – Parte 2

Limites Infinitos

Material elaborado por Letícia Mattos.

Introdução ao Cálculo – Limites – Parte 2
Limites Infinitos

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Para a função f dada por $f(x) = \dfrac{9}{(x-3)^5}$, calcule

(a) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

Exercício 2. Para a função f dada por $f(x) = \dfrac{x+3}{(x+1)^2}$, calcule

(a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

Exercício 3. Para a função f dada por $f(x) = \dfrac{x+7}{x^2-4}$, calcule

(a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Para cada uma das funções a seguir, encontre as assíntotas verticais:

(a) $f(x) = \dfrac{2x}{x-4}$.

(b) $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

(c) $h(x) = \dfrac{x^2-9}{1-x}$.

Dizemos que a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal de f se

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = L.$$

Exercício 5. Para cada uma das funções a seguir, encontre as assíntotas horizontais:

(a) $f(x) = \dfrac{2x^2-5x}{x^2+1}$.

(b) $g(x) = \dfrac{2x^4-1}{x^4+1}$.

(c) $h(x) = \dfrac{x^3-3}{x^3-1}$.

Dizemos que a reta $y = mx + b$ é uma assíntota oblíqua de f se

$$\lim_{x\to +\infty} \Big(f(x) - (mx+b)\Big) = 0$$

ou

$$\lim_{x\to -\infty} \Big(f(x) - (mx+b)\Big) = 0.$$

Exercício 6. Para cada uma das funções a seguir, encontre as assíntotas oblíquas:

(a) $f(x) = \dfrac{-3x^2+4}{x-1}$.

(b) $g(x) = \dfrac{x^2+6x}{x+2}$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 7. Calcule o limite

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1-\sqrt[4]{x}}{1-x}.$$

Exercício 8. Seja $a > 1$. Prove que

$$\lim_{n\to +\infty} \frac{n}{a^n} = 0.$$

Exercício 9. Encontre as assíntotas oblíquas da função f dada por

$$f(x) = 2x - 3^x + 4.$$

Dica: use o exercício anterior.

Respostas e Soluções.

1. Note que se $x \to 3$, então

$$\lim_{x\to 3} |f(x)| = \lim_{x\to 3} \frac{9}{|x-3|^5} = +\infty.$$

Note que, se $x < 3$, então $f(x) < 0$. E se $x > 3$, então $f(x) > 0$. Assim, segue que

(a) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty.$

(b) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty.$

2. Note que se $x \to -1$, então

$$\lim_{x\to -1} (x+3) = 2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to -1} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty.$$

Assim, segue que

(a) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty.$

(b) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty.$

3. Note que se $x \to 2$, então

$$\lim_{x\to 2} (x+7) = 9 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{1}{|x^2-4|} = +\infty.$$

Note que, se $x < 2$, então $x^2 - 4 < 0$. E se $x > 2$, então $x^2 - 4 > 0$. Assim, segue que

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x^2-4} = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x^2-4} = +\infty.$$

Portanto, temos

(a) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty.$

(b) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty.$

4. Antes de apresentarmos as soluções deste exercício, vamos relembrar o que é uma assíntota vertical. A reta $x = a$ é chamada de assíntota vertical de f se pelo menos uma das sentenças a seguir for verdadeira:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty.$$

(a) Note que se $x = a$ é uma assíntota vertical, então devemos ter

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty.$$

O único valor de a candidato a satisfazer a igualdade acima é aquele que não pertence ao domínio de f, isto é, $a = 4$. Agora, note que

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{2x}{x-4} = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 4^+} \frac{2x}{x-4} = +\infty.$$

Portanto, temos que $x = 4$ é de fato uma assíntota vertical.

(b) Novamente, notamos que se $x = a$ é uma assíntota vertical, então

$$\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty.$$

O único valor de a que é candidato a satisfazer a igualdade acima é aquele que não pertence ao domínio de g, isto é, $a = 0$. Agora, note que

$$\lim_{x\to 0^-} (x^2+1) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

e que

$$\lim_{x\to 0^+} (x^2+1) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Assim, segue que

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\lim_{x\to 0^-} g(x) = +\infty.$$

Assim, temos que $x = 0$ é de fato uma assíntota vertical.

(c) Novamente, notamos que se $x = a$ é uma assíntota vertical, então

$$\lim_{x\to a} |h(x)| = +\infty.$$

O único valor de a que é candidato a satisfazer a igualdade acima é aquele que não pertence ao domínio de h, isto é, $a = 1$. Agora, note que

$$\lim_{x\to 1^-} (x^2-9) = -8 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty.$$

e que

$$\lim_{x\to 1^+} (x^2+1) = -8 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty.$$

Assim, segue que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-9}{1-x} = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-9}{1-x} = +\infty$$

Assim, temos que $x = 1$ é de fato uma assíntota vertical.

5.

(a) Podemos escrever

$$\frac{2x^2-5x}{x^2+1} = 2 - \frac{2}{x^2+1} - \frac{5x}{x^2+1}. \tag{1}$$

Veja que

$$\lim_{x\to -\infty} 2 - \frac{2}{x^2+1} = \lim_{x\to +\infty} 2 - \frac{2}{x^2+1} = 2. \tag{2}$$

Agora, falta analisar o limite da função $-5x/(x^2+1)$ quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$. Note que podemos escrever

$$-\frac{5x}{x^2+1} = -\frac{5}{x+\frac{1}{x}}.$$

Agora, veja que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} = 0.$$

Assim, segue que

$$\lim_{x\to-\infty} -\frac{5}{x+\frac{1}{x}} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} -\frac{5}{x+\frac{1}{x}} = -\infty. \tag{3}$$

Por (1), (2) e (3) concluímos que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-5x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x}{x^2+1} = 2.$$

Assim, $y = 2$ é a única assíntota horizontal de f.

(b) Podemos escrever

$$\frac{2x^4-1}{x^4+1} = 2 - \frac{3}{x^4+1}. \tag{4}$$

Agora, veja que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^4+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4+1} = 0.$$

Assim, segue que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4-1}{x^4+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4-1}{x^4+1} = 2.$$

Assim, $y = 2$ é a única assíntota horizontal de g.

(c) Podemos escrever

$$\frac{x^3-3}{x^3-1} = 1 - \frac{2}{x^3-1}. \tag{5}$$

Agora, veja que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3-1} = 0.$$

Assim, segue que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-3}{x^3-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-3}{x^3-1} = 1.$$

Assim, $y = 1$ é a única assíntota horizontal de h.

6. Neste exercício, o objetivo é expressar as funções como por uma parte linear e uma parte que vai para 0 quando $x \to \pm\infty$.

(a) Podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{-3x^2+4}{x-1} &= \frac{-3x(x-1)-3x+4}{x-1}\\ &= -3x + \frac{-3(x-1)-3+4}{x-1}\\ &= -3x - 3 + \frac{1}{x-1}.\end{aligned}$$

Assim,

$$f(x) + 3x + 3 = \frac{1}{x-1}.$$

Como $\lim_{x\to-\infty}(x-1)^{-1} = \lim_{x\to+\infty}(x-1)^{-1} = 0$, segue que

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(f(x)+3x+3\Big) = \lim_{x\to+\infty}\Big(f(x)+3x+3\Big) = 0.$$

Portanto, a reta de equação $y = -3x - 3$ é a única assíntota oblíqua de f.

(b) Podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{x^2+6x}{x+2} &= \frac{x(x+2)+4x}{x+2}\\ &= x + \frac{4(x+2)-8}{x+2}\\ &= x + 4 - \frac{8}{x+2}.\end{aligned}$$

Assim,

$$g(x) - (x+4) = -\frac{8}{x+2}.$$

Como $\lim_{x\to-\infty}(x+2)^{-1} = \lim_{x\to+\infty}(x+2)^{-1} = 0$, segue que

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(g(x)-(x+4)\Big) = \lim_{x\to+\infty}\Big(g(x)-(x+4)\Big) = 0.$$

Portanto, a reta de equação $y = x + 4$ é a única assíntota oblíqua de f.

7. Note que

$$\begin{aligned}\frac{1-\sqrt[4]{x}}{1-x} &= \frac{1-\sqrt[4]{x}}{1-x}\cdot\frac{1+\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\\ &= \frac{1-\sqrt{x}}{(1-x)(1+\sqrt[4]{x})}.\end{aligned}$$

Isso nos dá

$$\begin{aligned}\frac{1-\sqrt[4]{x}}{1-x} &= \frac{1-\sqrt{x}}{(1-x)(1+\sqrt[4]{x})}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\\ &= \frac{1}{(1+\sqrt[4]{x})(1+\sqrt{x})}.\end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}\frac{1-\sqrt[4]{x}}{1-x} &= \lim_{x\to1^-}\frac{1}{(1+\sqrt[4]{x})(1+\sqrt{x})}\\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

8. Escreva $a = b + 1$, onde $b > 0$. Pelo teorema do binômio de Newton, temos que

$$(1+b)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}b^2.$$

Isso nos dá

$$\frac{n}{a^n} = \frac{n}{(1+b)^n} \leq \frac{2}{b^2(n-1)}$$

Como $\lim_{n\to+\infty}(n-1)^{-1} = 0$, segue que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{a^n} = 0.$$

9. Primeiro, provaremos que não existe assíntota oblíqua quando $x \to +\infty$. Suponha por contradição que esse é o caso. Logo, devemos ter $m, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(3^x - mx - b\right) = 0.$$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} |mx + b|^{-1} = 0$, temos

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3^x}{|mx+b|} - 1\right) = 0.$$

Mas isso é uma contradição! Pelo exercício anterior, temos que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3^x}{|mx+b|} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3^x}{|m|x} = +\infty.$$

Assim, concluímos que não existe assíntota oblíqua quando $x \to +\infty$.

Por outro lado, quando $x \to -\infty$, temos que

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - 2x - 4\right) = \lim_{x \to +\infty} -3^x = 0.$$

Assim, concluímos que a reta de equação $y = 2x + 4$ é uma assíntota oblíqua de f quando $x \to -\infty$.

Material elaborado por Letícia Mattos.